



# De nya modulerna om dynamiska matematikprogram i undervisningen

Maria Fahlgren, Mats Brunström, KAU & Ulrica Dahlberg, NCM

# Modul med 4 delar

- GeoGebra – ett dynamiskt matematikprogram
- Demonstration i helklass
- Dynamiska arbetsblad med GeoGebra
- Elevaktiviteter med GeoGebra-konstruktioner



# Innehållet i varje del ...

- Texter att läsa och instruktionsfilmer att se i Moment A
- Diskussionsfrågor kring texter samt kring planerande av lektion i Moment B
- Många aktiviteter att välja på att genomföra i klass men även för sig själv, som görs i Moment C
- Diskussionsfrågor kring undervisningen i Moment D

**Moment A**

**Moment B**

**Moment C**

**Moment D**

**Fördjupning**

# På gång ...

- Precis gjort klart en revidering av modulerna för åk 7 – 9 och gy
- Startar upp en modul för åk 4 – 6
- Workshopserier kring modulerna

# Workshopserier

Högskolan i Halmstad  
Högskolan Kristianstad  
Karlstads universitet  
Linköpings universitet  
Linnéuniversitetet  
Malmö universitet  
Mittuniversitetet  
Örebro universitet



# Workshopserier

## Målgrupp

Lärare som undervisar matematik i åk 7-9 och i Gy, samt motsvarande skolformer inom vuxenutbildningen

## Syfte

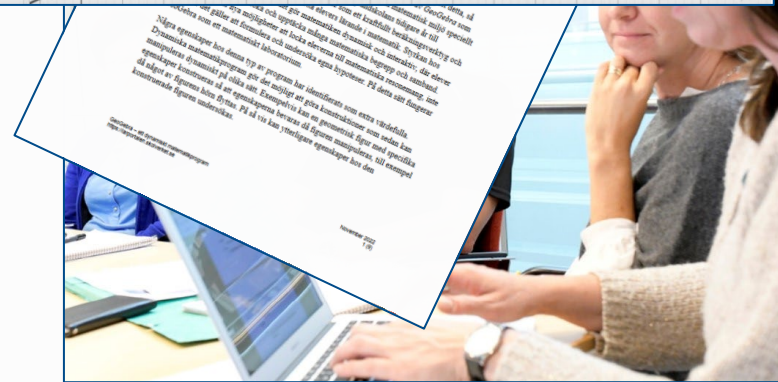
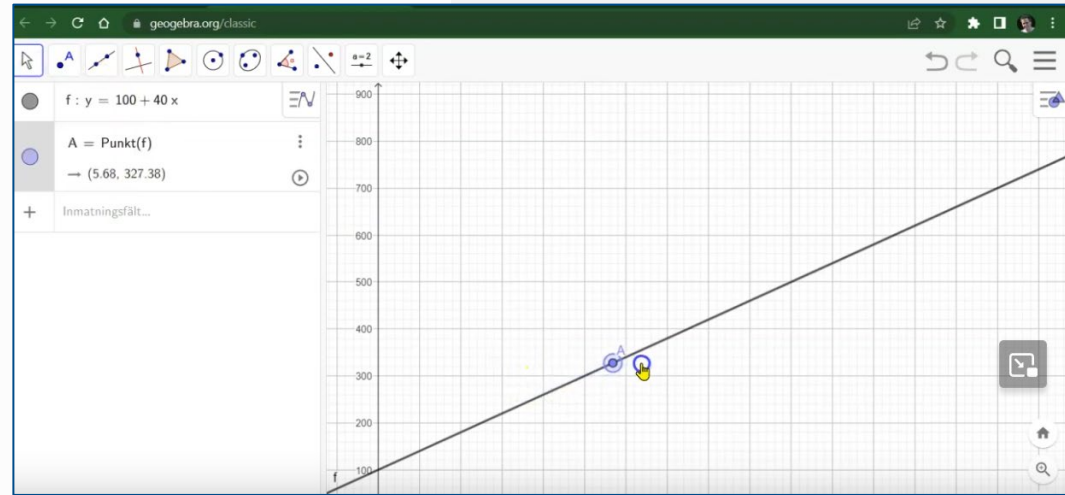
Ge deltagande lärare möjlighet att utveckla sina kunskaper och färdigheter i användning av dynamiska matematikprogram i undervisningen



# Workshopserier

## Genomförande

- Utgår från modulerna
- Två spår – åk 7-9 och Gy
- Sex träffar/workshopserie (15h totalt)
- Rektorer bjuds in att delta vid första träffen
- Förberedelser för deltagande lärare:
  - inläsning text (Moment A)
  - genomförande aktivitet (Moment C)



# Del 1: GeoGebra – ett dynamiskt matematikprogram

[länk](#)

- Introduktion av GeoGebra
- Fokus på att deltagande lärare själva ska lära sig grunderna i GeoGebra
- Resurser i modulen
  - Inspirationsfilm (Jonas Hall) som visar möjligheter med GeoGebra
  - Lärarröst om att använda GeoGebra (Cecilia Christiansen)
  - Introduktionsguide
  - Text som lyfter möjligheter, men även risker och utmaningar
- Workshopseriens fokus
  - Demonstration av exempel
  - Jämför lösning "för hand" och med GeoGebra – fördelar/nackdelar
  - Gruppdiskussion: erfarenheter/möjligheter/utmaningar

## Ma 2a, 2b och 2c vt 2015

För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = x^2 - 4x + C$  där  $C$  är en konstant. Punkten  $(5, 7)$  ligger på funktionens graf. Bestäm koordinaterna för en annan punkt som också ligger på grafen.

Lösning utan digitalt verktyg. Eleven behöver:

**Inse att problemet behöver lösas i två steg:** Bestäm först  $C$  och därefter en punkt till på grafen

**Bestäm  $C$  genom att:**

Inse att  $C$  kan bestämmas med hjälp av punkten  $(5, 7)$

Inse att  $(5, 7)$  ligger på grafen  $\Leftrightarrow f(5) = 7$

Skapa ekvationen:  $f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + C = 7$

Lösa ekvationen:  $5^2 - 4 \cdot 5 + C = 7$

**Ta fram ytterligare en punkt på grafen genom att:**

Beräkna t. ex.  $f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = -1$

Inse att  $f(1) = -1 \Leftrightarrow$  punkten  $(1, -1)$  ligger på grafen

Lösning med GeoGebra

**Inse att problemet behöver lösas i två steg:**

Bestäm först  $C$  och därefter en punkt till på grafen

**Bestäm  $C$  genom att:**

Inse att  $C$  kan bestämmas med hjälp av punkten  $(5, 7)$

Mata in funktionsformeln i algebrafönstret, en glidare  $C$  skapas

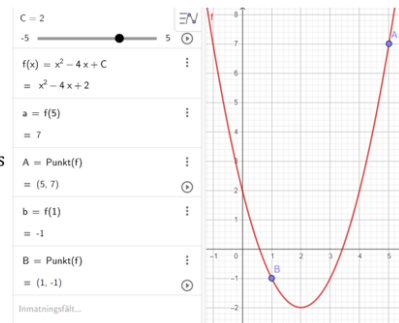
Eventuellt mata in punkten  $(5, 7)$

Dra i glidaren så att punkten  $(5, 7)$  ligger på grafen

Eventuellt kontrollera genom att mata in  $f(5)$

**Ta fram ytterligare en punkt på grafen genom att:**

Lägga in en punkt på grafen med hjälp av punktverktyget

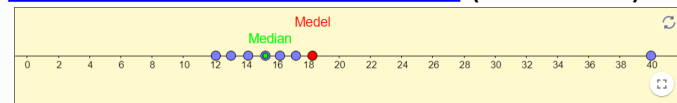




# Del 2: Demonstration i helklass

- Användning av GeoGebra för att dynamiskt visualisera och diskutera matematiska samband i helklass
- Finns många färdiga GeoGebra-applikationer att utgå ifrån på [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)
- Lärarcentrerad eller elevcentrerad klassrumsdiskussion?  
För att en klassrumsdiskussion skall bli elevcentrerad krävs väl genomtänkta frågor
- Resurser i modulen
  - Text med exempel och diskussion kring hur demonstrationer med GeoGebra kan utvecklas till mer elevcentrerade diskussioner

## Jämförelse medel och median (Jonas Hall)

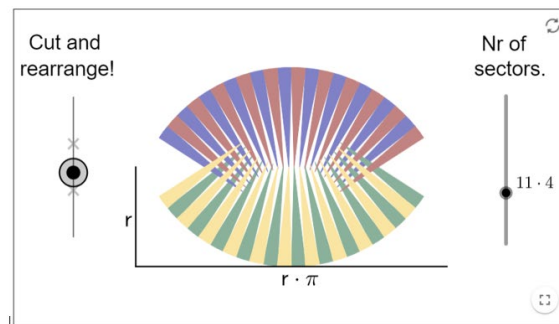


- Vad händer med medianen och medelvärdet om vi flyttar ...?
- Vilket är det största värdet ni kan få på medianen genom att flytta en punkt?
- Hur kan punkterna placeras för att medianen ska bli 10 och medelvärdet ska bli så stort som möjligt?
- Hur kan punkterna placeras för att medelvärdet ska bli 20 och medianen ska bli så stor som möjligt?
- Hur kan punkterna placeras för att medelvärdet ska vara ett "missvisande" lägesmått?

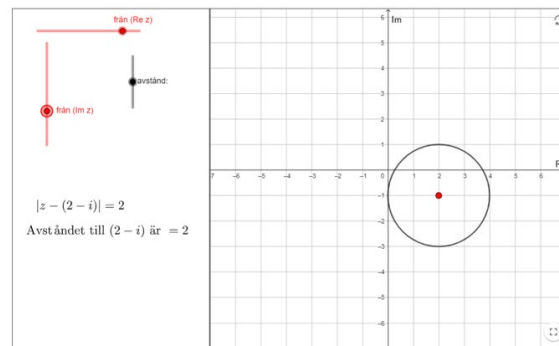
# Del 2: Demonstration i helklass

- Användning av GeoGebra för att dynamiskt visualisera och diskutera matematiska samband i helklass
- Finns många färdiga GeoGebra-applikationer att utgå ifrån på [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)
- Lärarcentrerad eller elevcentrerad klassrumsdiskussion?  
För att en klassrumsdiskussion skall bli elevcentrerad krävs väl genomtänkta frågor
- Resurser i modulen
  - Text med exempel och diskussion kring hur demonstrationer med GeoGebra kan utvecklas till mer elevcentrerade diskussioner
  - Exempel på färdiga GeoGebra-applikationer
- UPPGIFT: Planera, diskutera, genomföra och utvärdera en helklassdemonstration
- Workshopseriens fokus
  - Exempel på färdiga GeoGebra-applikationer och diskussion kring lämpliga frågor till eleverna samt hur applikationer kan anpassas
  - Gruppdiskussion: planering av helklassdemonstration

## [Cirkelns area](#) (Malin Christersson)



## [Komplexa tal som uppfyller beloppsvillkor](#) (Visuell matematik: Svetlana & Anders)

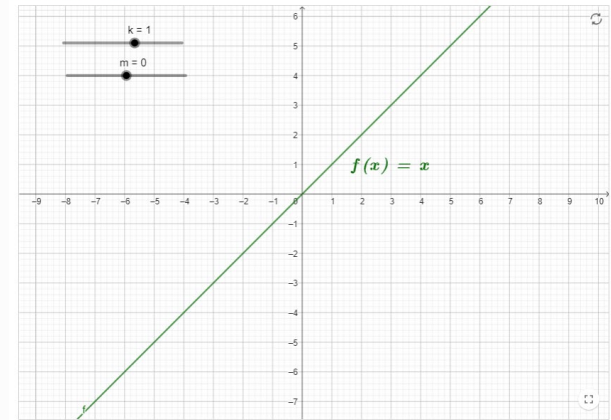


# Del 3: Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

- GeoGebra-applikationer med instruktioner och uppgifter
- Tre olika syften
  - Undersöka-upptäck-dra slutsatser-verifiera

## Linjära funktioner

Author: Mats Brunström



En linjär funktion kan alltid skrivas på formen  $f(x) = kx + m$

Undersök genom att dra i glidare  $m$  hur värdet på  $m$  kan avläsas i koordinatsystemet. Formulera en slutsats.

As  $\pi$  Type your answer here...

Ställ in nya värden på glidare  $k$  och undersök om din slutsats fortfarande gäller. Om den inte gäller får du formulera en ny slutsats.

As  $\pi$  Type your answer here...

Undersök hur värdet på  $k$  påverkar grafen. Formulera en slutsats.

As  $\pi$  Type your answer here...

# Del 3: Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

- GeoGebra-applikationer med instruktioner och uppgifter
- Tre olika syften
  - Undersöka-upptäck-dra slutsatser-verifiera
  - Illustration av samband-dra slutsatser

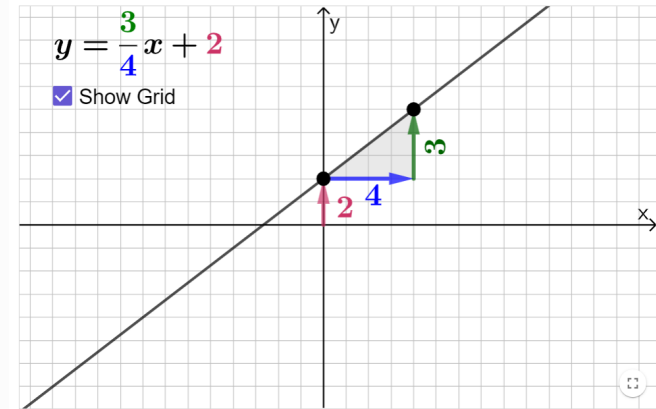
## Linear Equation Anatomy

[länk](#)

Author: Tim Brzezinski

Topic: Algebra, Equations, Functions, Linear Equations, Linear Functions

Move the LARGE POINTS to move the line. Show the grid if you'd like. Then answer the questions that follow.



How can we tell the slope a line by looking at its equation? Explain.

Aa  Type your answer here...

How can we tell the y-intercept of a line by looking at its equation? Explain.

Aa  Type your answer here...

# Del 3: Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

- GeoGebra-applikationer med instruktioner och uppgifter
- Tre olika syften
  - Undersöka-upptäck-dra slutsatser-verifiera
  - Illustration av samband-dra slutsatser
  - Färdighetsträning

## Graphing Linear Equations: Question Generator (V1)

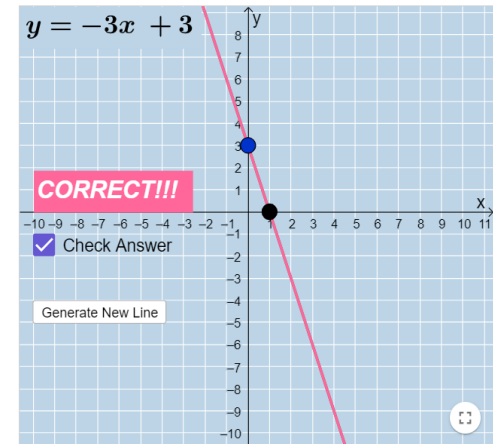
Author: Tim Brzezinski

Topic: Equations, Linear Equations

The original idea for creating this applet comes from [Steve Phelps' Graph the Line](#) app.

### Directions:

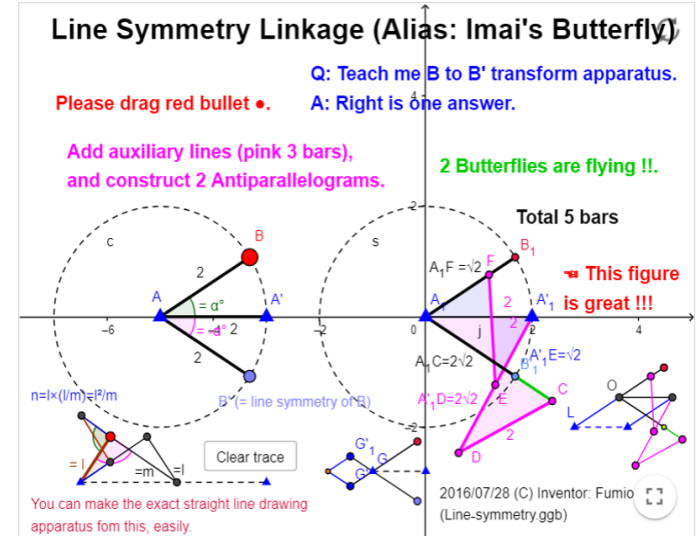
- 1) Examine the equation shown on the right side of the screen.
- 2) **Reposition the 2 big points so that the line is the graph of the displayed equation.**
- 3) Click the "Check Answer" checkbox to check.
  - If you're correct, the app will inform you.
  - If you're not, you'll know this as well.
  - If you're not correct, keep trying until you position the gray line correctly.
- 4) After correctly graphing the line, click the "Generate New Line" button.



# Del 3: Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

- GeoGebra-applikationer med instruktioner och uppgifter
- Tre olika syften
  - Undersöka-upptäck-dra slutsatser-verifiera
  - Illustration av samband-dra slutsatser
  - Färdighetsträning
- Att tänka på vid konstruktion/val av dynamiska arbetsblad
  - Layout
  - GeoGebra-applikationen
  - Instruktioner och uppgiftsformuleringar

## Varning för kognitiv belastning



# Del 3: Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

- GeoGebra-applikationer med instruktioner och uppgifter
- Tre olika syften
  - Undersöka-upptäck-dra slutsatser-verifiera
  - Illustration av samband-dra slutsatser
  - Färdighetsträning
- Att tänka på vid konstruktion/val av dynamiska arbetsblad
  - Layout
  - GeoGebra-applikationen
  - Instruktioner och uppgiftsformuleringar
- Resurser i modulen
  - Text där syftena och riktlinjerna exemplifieras och diskuteras
  - Film som visar exempel från ett klassrum
  - Exempel på färdiga dynamiska arbetsblad
- UPPGIFT: Planera/diskutera/genomföra och utvärdera en lektion där elever använder dynamiska arbetsblad
- Workshopseriens fokus
  - Exempel på dynamiska arbetsblad och hur de kan anpassas till den egna undervisningen
  - Gruppdiskussion: Erfarenheter (Del 2), planering (Del 3)

## Skolverket

Matematik – Gymnasieskola  
Modul: Dynamiska matematikprogram i undervisningen  
Del 3: Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

### Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

Maria Fahlgren och Mats Brunström, Karlstads universitet

I denna text kommer vi att fokusera på elevers användande av dynamiska matematikprogram. Förutom att själv kunna använda GeoGebra, behöver läraren kunna avgöra när det är lämpligt att använda GeoGebra samt vilka eventuella hinder elever kan uppleva då de använder programmet. Ett sätt att minska risken för att elever skall fastna i tekniska problem är att låta dem arbeta med färdigkonstruerade applikationer. Idag erbjuder många digitala läromedel denna typ av interaktiva komponenter. Det finns även en uppsjö av färdiga GeoGebra-applikationer att tillgå, via exempelvis [geogebra.org](https://www.geogebra.org), som lärare kan använda men också anpassa till sin egen undervisning. Naturligtvis är det även möjligt för lärare att själva konstruera applikationer som de sedan kan dela med sina elever.

En av styrkorna med ett dynamiskt matematikprogram är möjligheten till interaktion där den visuella återkopplingen gör det möjligt för elever att snabbt testa olika idéer. Dock visar forskning att det ibland kan vara svårt för elever att tolka återkopplingen på ett konstruktivt sätt. För att lärande skall kunna ske behöver eleverna kunna tolka den visuella återkopplingen och översätta den till matematisk kunskap (Joubert, 2017). De behöver, som Noss et al. (1997) uttrycker det, mentalt kunna gå från det empiriska/visuella till det systematiska/matematiska. Det finns en identifierad risk att elever, medan de arbetar med ett dynamiskt matematikprogram, endast kommer att förhålla sig till de empiriska/visuella objekt som erhålls på skärmen utan att reflektera över den bakomliggande matematiken. Därför är det viktigt, vid utformningen av elevaktiviteter, att tänka på hur man formulerar uppgifter som uppmanar eleverna att gå längre än att bara rapportera vad de har sett på skärmen (Joubert, 2017). Ett sätt att göra detta på är att be eleverna om förklaringar till de observationer de gör.

Vi kommer i denna del att fokusera på viktiga aspekter att beakta i samband med användningen av färdigkonstruerade applikationer. I jämförelse med en statisk bild är en rörlig bild eller en interaktiv komponent mer komplex. Därför blir det viktigt att reflektera över vilka instruktioner eleverna behöver få och hur frågorna skall formuleras för att rikta deras uppmärksamhet mot syftet med applikationen. Vi har valt att kalla en färdigkonstruerad GeoGebra-applikation med tillhörande text i form av instruktioner och frågor till elever för ett *dynamiskt arbetsblad* (*dynamic worksheet*).

# Del 4: Elevaktiviteter med GeoGebra-konstruktioner

- Elevaktiviteter där eleverna själva ska göra de GeoGebra-konstruktioner som behövs
- Fördelar måste vägas mot nackdelar
  - + Eleverna lär sig programmet
  - + Själva konstruktionen kan vara lärorik
  - + Matematiska brister kan upptäckas
  - Tar tid för elever och lärare
  - Elever kan fastna i tekniska problem
- Resurser i modulen
  - Text med exempel där olika viktiga val vid design av elevaktiviteter diskuteras. Avslutningsvis diskuteras kopplingen till de förmågor som lyfts fram i styrdokumentet
  - Exempel på elevaktiviteter
- UPPGIFT: Planera/diskutera/genomföra och utvärdera en lektion där eleverna gör GeoGebra-konstruktionerna själva
- Workshopseriens fokus
  - Exempel på och diskussion kring aktiviteter och hur elever stegvis kan lära sig hantera GeoGebra
  - Gruppdiskussion: Erfarenheter (Del 3), planering (Del 4)

GeoGebra Classic

## ANDRAGRADSFUNKTIONER

Andragsgradsfunktioner kan alltid skrivas på formen  $f(x) = ax^2 + bx + c$  där  $a$ ,  $b$  och  $c$  är reella tal och  $a \neq 0$ . Du ska nu studera andragsgradsfunktioner skrivna på denna form med hjälp av *GeoGebra*.

☰ Mata in funktionen  $f(x) = ax^2 + bx + c$  i inmatningsfältet.

**OBS!** Potenser skrivs in som till exempel  $x^2$ . Efter att en exponent matats in, tryck på höger (på tangentbordet)!

Nu har det även skapats tre glidare, **a**, **b** och **c**, i Algebrafönstret.

☰ "Dra" in funktionsformeln från Algebrafönstret till Ritområdet.

☰ Ställ in glidare **a** på värdet 1 (genom att dra i punkten på glidaren) och glidare **b** på värdet 0.

- I. a) Undersök, genom att dra glidare **c**, hur värdet på **c** påverkar grafen. Beskriv med egna ord:

☰ Ställ in nytt värde på glidarna **a** och **b** och undersök om ditt resultat ovan fortfarande verkar gälla. Om inte, ge en ny beskrivning:

- b) Värdet på konstanten **c** kan avläsas i koordinatsystemet. *Hur?*



# Workshopseriens avslutande inlämningsuppgift

UPPGIFT: Reflektera kring möjligheter och utmaningar med att använda GeoGebra i undervisningen

De flesta lyfte möjligheter som kan leda till ökad förståelse hos eleverna. Några möjligheter som nämndes var att:

- visualisera abstrakta matematiska begrepp och samband
- låta eleverna undersöka matematiska samband
- variera undervisningen för att öka elevernas motivation
- snabbt rita exakta figurer

Bland de utmaningar som lärarna nämnde handlade de flesta om:

- behov av tid att lära sig programmet, både för lärare och elever
- behov av ytterligare kompetensutveckling
- distraktionsproblem när elever jobbar vid datorer
- att elever kan ha svårt att se kopplingen mellan det de gör i GeoGebra och mer traditionella uppgifter



# Tack för er uppmärksamhet och välkomna till modulerna



## Dynamiska matematikprogram i undervisningen, gy >

**Skolformer:** Vuxenutbildning, Gymnasieskola **Områden:** Matematik, Digital kompetens **Ämne:** Matematik



## Dynamiska matematikprogram i undervisningen, åk 7-9 >

**Skolformer:** Vuxenutbildning, Grundskola **Årskurs:** 7-9 **Områden:** Matematik, Digital kompetens **Ämne:** Matematik

Maria Fahlgren, Mats Brunström, KAU & Ulrica Dahlberg, NCM