Från traditionella bevisuppgifter till undersökande aktiviteter med GeoGebra

Workshop

Matematikbiennalen 2022

Mats Brunström och Maria Fahlgren
Karlstads universitet

Resonemang och bevis

Enligt flera matematikdidaktiska forskare kan formulering av ett formellt bevis ses som en del i en matematisk resonemangskedja som består av faser *före* och *efter* den formella bevisföringen:

- *Undersöka en matematisk situation, exempelvis genom att söka mönster, och formulera hypoteser*
- *Bekräfta eller förkasta hypotesen*

Upptäckarfas

- *Förklara och bevisa hypotesen*

Verifieringsfas

- *Undersöka vidare för att hitta eventuella generaliseringar*

Genaralisera

Hur kan dynamiska geometriprogram stötta?

I workshopen demonstreras hur tillgången till dynamiska matematikprogram kan utnyttjas för att utveckla traditionella bevisuppgifter till mer öppna uppgifter som stimulerar till ett utforskande arbetssätt där själva beviset ingår som en naturlig del.

På så vis kan ett formellt bevis ses som en del i en matematisk resonemangskedja som även består av faser *före* och *efter* den formella bevisföringen.

Modell för att göra en traditionell bevisuppgift till en undersökande aktivitet

a) *Beskrivning av den matematiska situationen*

   Gör en lämplig konstruktion i *GeoGebra* och studera …. Formulera en hypotes.

b) *Bekräfta hypotesen.*

   Är du övertygad om att din hypotes är sann? Om inte, försök att använda *GeoGebra* för att bekräfta din hypotes. Gå vidare till nästa uppgift när du är övertygad.

c) *Förklara med egna ord varför din hypotes är sann.*

d) *Konstruera ett bevis.*

e) *Undersök om din hypotes kan generaliseras.*

   Genomför uppgifterna ovan utifrån nya premisser, genom att t.ex. ställa frågor som vad händer om? och vad händer om inte?

Fahlgren & Brunström (2014) *A Model för Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry Environment*

Illustrerande exempel

Uppgiften (original)

Låt P vara en *godtycklig punkt på ellipsen* $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ *och låt F* vara en brännpunkt. Låt *M* vara mittpunkten mellan *P och F.*

Bevisa att geometriska orten till *M* är en ellips.

Välkomna att testa modellen genom att gå in på följande GeoGebra Book:

Från traditionell bevisuppgift till undersökande aktivitet

Logga in på: **www.geogebra.org**

Välj ”**Classroom**” och ange lektionskoden:

DF2C PYVA

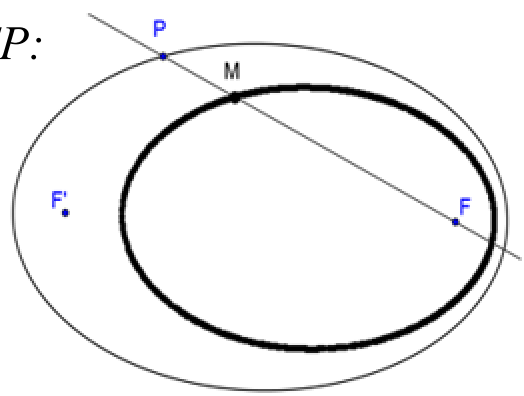
Ange Namn

e) Undersök om din hypotes kan generaliseras. Genomför uppgifterna ovan utifrån nya premisser, genom att t.ex. ställa frågor som vad händer om? och vad händer om inte?

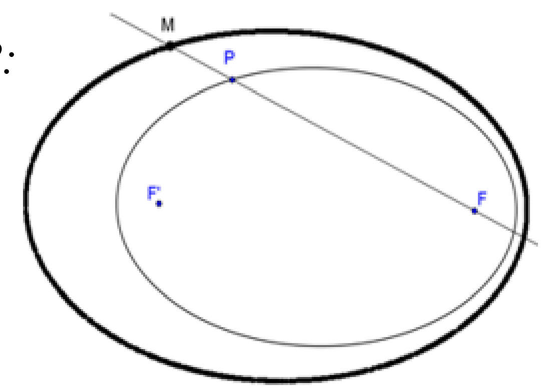
Låt P vara en *godtycklig punkt på en ellips. Låt M vara mittpunkten mellan P och en av ellipsens brännpunkter.*

(i) Vad händer om M inte är en mittpunkt?

Om $FM < FP$:



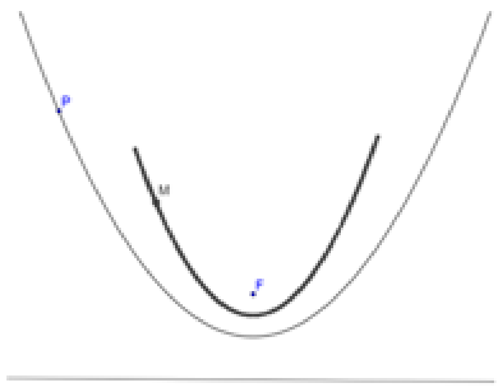
Om $FM > FP$:



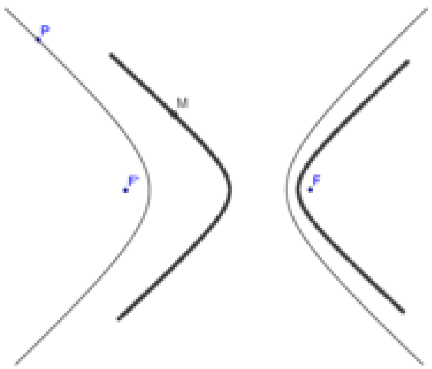
Generalisering 1: Om *P* är en godtycklig punkt på en ellips och *M* är en **godtycklig** punkt på linjen genom *P* och en av ellipsens brännpunkter, då är geometriska orten till *M* en ellips.

(ii) Vad händer om *P* är en punkt på ett annat kägelsnitt?

Om *parabel:*

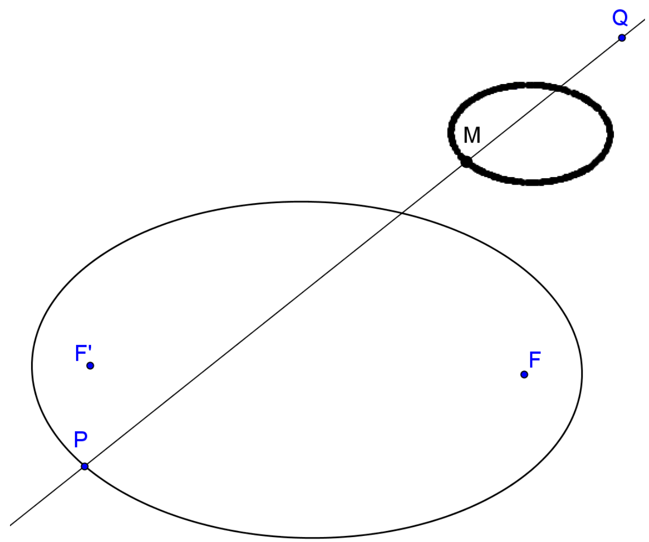


Om *hyperbel:*



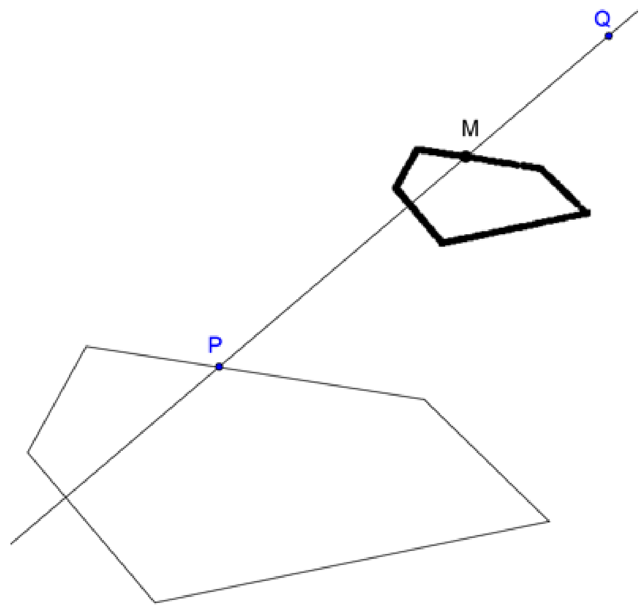
Generalisering 2: Om *P* är en godtycklig punkt på ett **kägelsnitt** och *M* är en **godtycklig** punkt på en linje genom *P* och en av brännpunkterna, då är geometriska orten till *M* är ett **kägelsnitt** av samma typ.

(iii) Vad händer om M är en punkt mellan P och en annan godtycklig punkt (istället för brännpunkten)?



Generalisering 3: Om *P* är en godtycklig punkt på ett **kägelsnitt** och *M* är en **godtycklig** punkt på en linje genom *P* och **en godtycklig punkt *Q***, då är geometriska orten till *M* är ett **kägelsnitt** av samma typ.

(iii) Vad händer om *P* är en punkt på ett annat geometriskt object?



Likställighetsavbildning

Generalisering 4: Om *P* är en godtycklig punkt på ett **godtyckligt geometriskt objekt** och *M* är en **godtycklig** punkt på en linje genom *P* och **en godtycklig punkt *Q***, då är geometriska orten till *M* är ett likformigt geometriskt objekt..

Tack för oss!