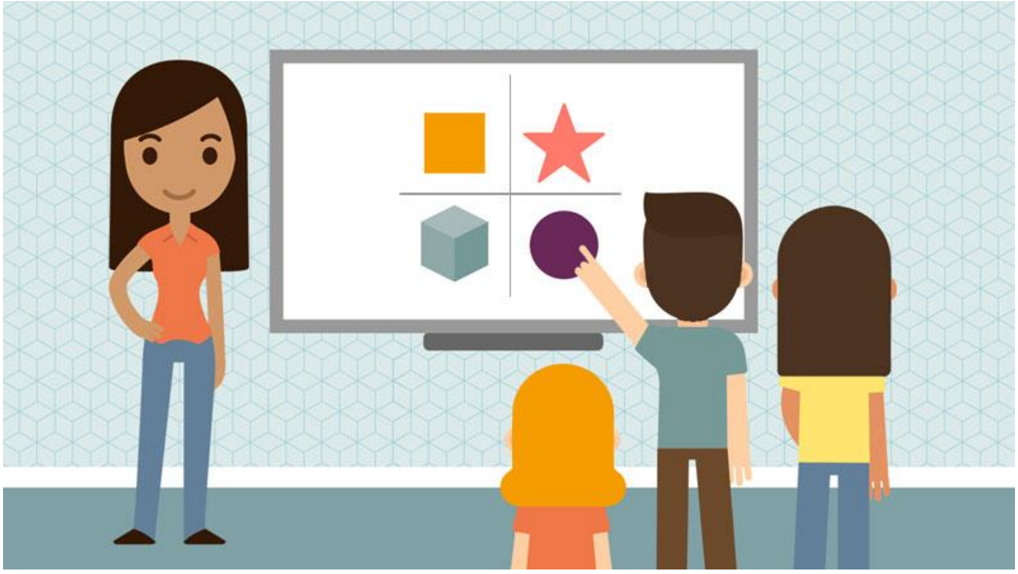
Resonemang genom problemlösning

Jorryt van Bommel, Karlstads universitet & Hanna Palmér, Linnéuniversitetet



Enligt förskoleklassens centrala innehåll ska elever få möta och föra enkla matematiska resonemang i problemlösande situationer. I en sådan situation ska eleverna undersöka problemställningen samt reflektera kring olika sätt att lösa problemet. Att undersöka och reflektera görs med fördel i samspel med andra, så att eleverna ges möjlighet att föra egna och följa andras matematiska resonemang.

Denna text handlar om hur förskoleklassens undervisning kan utformas för att ge eleverna möjligheter att föra och följa matematiska resonemang samt undersöka och lösa matematiska problem.

Att föra och följa matematiska resonemang

Att *föra* matematiska resonemang innebär att motivera och argumentera för sina lösningar och lösningars rimlighet. Att *följa* matematiska resonemang innebär att tolka, värdera och bemöta andras motiveringar och argument. Förmågan att föra och följa resonemang används och utvecklas inte enbart i planerade undervisningssituationer utan yngre barn både för och följer matematiska resonemang i spontana vardagliga situationer (Sumpter & Hedefalk, 2015). Alla resonemang utgår inte heller från matematiska erfarenheter utan när förskoleklasselever resonerar blandas vanligen matematiska och vardagliga erfarenheter. I exemplet nedan beskriver Linus sin skolväg och i beskrivningen blandas matematiska begrepp (lång, kort) och vardagliga erfarenheter (åka bil går snabbare än att gå).

> Det är lite uppåt först och sen en jättelång gata, sedan svänger man så [pekar med händerna] och lite så [pekar igen] och så är det bara en kort bit så är man på skolan. Med bilen är det superkort, men ibland går vi och då är det långt.

Ett resonemang behöver inte innebära en lösning på en uppgift eller argument för en slutsats utan resonemang kan också vara utforskande där elever undersöker olika möjliga lösningar och slutsatser. Jahnke (2016) beskriver att sådana (utforskande) resonemang inkluderar att elever prövar, gissar och ifrågasätter. Genom utforskande resonemang kan eleverna upptäcka nya strukturer eller mönster. Ett matematiskt resonemang behöver dock inte innehålla formella bevis eller formella matematiska begrepp för att räknas som ett matematiskt resonemang. Enligt Lithner (2008) kan argumenten i ett matematiskt resonemang till och med vara felaktiga så länge dessa argument kan anses vara rimliga och förnuftiga för den som resonerar. Exempelvis kan resonemanget att ”ju större ett objekt är desto tyngre är objektet” vara rimligt utifrån en elevs nuvarande erfarenheter. För en lärare kan ett sådant resonemang utgöra utgångspunkt för planering av vidare undervisning och när eleven får nya och fler erfarenheter kommer resonemanget att förändras utifrån de erfarenheterna.

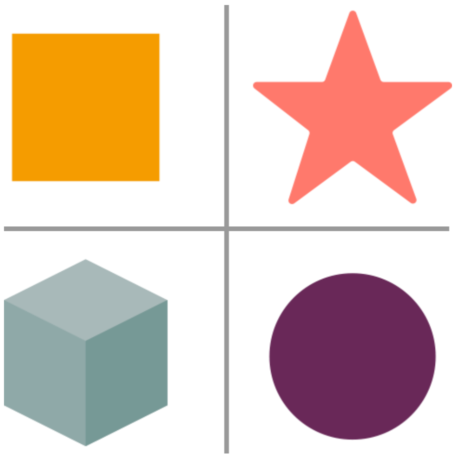


Bild 1: Vilken ska bort?

> Läraren i förskoleklass visar de tre eleverna Olivia, Karim och Saga fyra figurer (ovan) och frågar dem ”vilken ska bort”?
>
> Olivia: den här [pekar på kuben] ska bort, för den är inte platt.
> Karim: Men den har ju hörn, så cirkeln ska bort!
>
> Läraren repeterar det Olivia har sagt: att kuben inte är platt, men att de andra tre figurerna, cirkeln, kvadraten och stjärnan är platta figurer. Läraren frågar Karim om han håller med. Karim svarar att Olivia nog har rätt. Läraren berättar att i den här sortens uppgifter finns det inte enbart ett rätt svar, utan uppgiften kan ha flera rätta svar. Det gäller att man kan förklara sin lösning.

Lärare: Du tyckte cirkeln skulle bort. Vad menade du med hörn Karim?
Karim: Ett hörn är spetsigt. Den runda figuren har inga spetsar.

Läraren frågar de andra eleverna om de förstår vad Karim menar och både Saga och Olivia nickar. Därefter utmanar läraren eleverna och ber dem argumentera för att stjärnan ska tas bort. Eleverna samarbetar och diskuterar olika argument. Till slut är det Saga som kommer på en regel:

Sara: Stjärnan ska bort, för den hör inte till matematik!

Läraren frågar vad hon menar med att stjärnan inte hör till matematik. Saga förklarar att de andra tre har ett speciellt namn inom matematiken, den runda heter ju cirkel, fyrkanten heter kvadrat och lådan heter kub, men stjärna är stjärna!

I exemplet ovan *för* och *följer* eleverna utforskande resonemang där matematiska begrepp (t ex. hörn) och argument (inte platt; inga hörn) inkluderas. Läraren ställer frågor där eleverna behöver förklara sina argument (”Vad menade du med hörn Karim?”) och vid ett flertal tillfällen försäkrar läraren sig om att eleverna kan följa varandras resonemang. Läraren repeterar även det eleverna säger och introducerar nya begrepp (kub och cirkel). Genom lärarens ageranden förändras och fördjupas elevernas resonemang.

Verbala och icke-verbala resonemang

När elever samarbetar i grupp förs oftast verbala resonemang där eleverna använder olika matematiska begrepp så som i exemplet ”vilken ska bort” ovan. Resonemang kan dock även vara skriftliga i form av bilder eller text eller genomföras i handling. I exemplet nedan för William ett skriftligt resonemang som sedan stödjer honom när han ska föra ett verbalt resonemang.

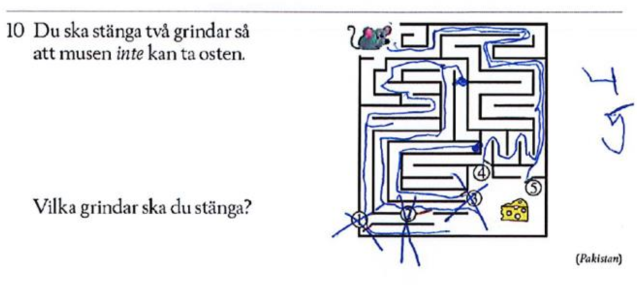


Bild 2: Vilka grindar ska du stänga? (Uppgiften är från Kängurutävlingen 2019–Milou)

Genom att rita har William prövat alla möjligheter för musen att nå fram till osten och strukit över grindarna som inte leder till osten. De grindar som behöver stängas har inte strukits över. När William sedan ska förklara för klasskompisarna hur han kom fram till att grind 4 och 5 ska stängas använder han sin ritade lösning. Han pekar på det han har ritat och förklarar att strecken i labyrinten visar hur musen kan komma fram till osten och att det bara är via grindarna 4 och 5 som musen kan komma dit.

Vad är en problemuppgift?

En uppgift är en problemuppgift om eleven inte på förhand vet hur uppgiften kan lösas. Det innebär att det är elevens tidigare erfarenheter som avgör om en uppgift är en problemuppgift eller inte. Att eleven inte vet hur den ska gå tillväga för att lösa uppgiften innebär också att det är utmanade för elever att arbeta med problemlösning. Studier i förskoleklass har dock visat att elever gärna låter sig utmanas, att utmaningarna väcker deras intresse för matematik och att de lär matematik genom att utforska problemuppgifter. Samma studier visar att öppna problemuppgifter där metoden för lösningen inte är given eller där olika strategier kan användas och där resonemang kan föras och följas, lämpar sig utmärkt för förskoleklassens matematikundervisning (Palmér & van Bommel, 2018a, b).

Det finns en uppsjö av olika problemuppgifter för elever att arbeta med där uppgifterna kan ta sin utgångspunkt i elevernas intressen, i ett matematiskt innehåll eller i verkliga situationer. Problemuppgifter medför oftast möjlighet att föra och följa utforskande resonemang. En typ av problemuppgifter som fungerar väl i förskoleklassen då de går att anpassa för att utmana elever med olika förkunskaper, är så kallade *rika matematiska problem* (se t.ex. Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Rika matematiska problem kännetecknas av att de kan lösas på olika sätt (jämför gärna *Vilken ska bort* i exemplet ovan), att lösningsstrategin kan generaliseras och att flera olika matematiska moment kan kopplas samman. Rika problem är också uppbyggda med en tydlig matematisk progression och kan utvecklas så att de blir enklare eller svårare.

Lärarens roll när elever resonerar och löser problem

När elever arbetar med problemuppgifter är det vägen till lösningen som är viktigast. Inledningsvis behöver läraren säkerställa att eleverna förstår problemet. Det kan innebära att begrepp behöver förtydligas eller att eleverna behöver formulera frågan med egna ord. När eleverna förstår problemet är nästa steg att de utforskar olika möjligheter att lösa problemet. Detta utforskande kan med fördel genomföras i grupp där eleverna kan föra och följa resonemang som del av problemlösningsprocessen. Slutligen diskuteras gemensamt de olika strategier och lösningar som eleverna har kommit fram till.

De frågor som lärare ställer kan vara mer eller mindre stödjande för elevers problemlösning och resonemang.

> Läraren har med sig ett antal likadana burkar och att antal lock. Hon lägger burkar och lock huller om buller på ett bord och frågar eleverna om de tror att alla burkar kan få ett lock. Eleverna svarar både ja och nej.
>
> Filip: Det ser ut så i alla fall!
>
> Läraren: Men hur kan vi ta reda på om det stämmer? [frågar efter en strategi]
>
> Evy: Räkna!
>
> Läraren börjar räkna både burkar och lock samtidigt.

> Evy: NEJ! Först burkarna.
>
> Otto får uppdraget att räkna burkarna. Han räknar *ett, två tre*… utan att riktigt hålla ordning på vilka burkar han har räknat och vilka burkar som är kvar att räkna. Otto kommer fram till nio burkar. Manja får också i uppdrag att räkna burkarna och kommer fram till att det är sju burkar. Läraren undrar om det kan vara olika*? [frågar efter en förklaring]* Moa svarar att de kan lägga burkarna och locken i två olika högar och därefter räkna hur många det är. Sandra svarar att de lika gärna kan sätta locken direkt på burkarna, då ser man om det är lika många.
>
> Läraren: Vill ni sätta locken på burkarna eller vill ni räkna och jämföra antalet burkar och lock?
>
> De flesta elever vill räkna eftersom de då också får veta hur många burkar och lock det är. En liten stund senare har eleverna räknat att det är sju burkar som står på rad och åtta lock. Ja, alla burkar fick ett lock!

Utifrån lärarens frågor föreslår Evy och Sandra olika strategier vid olika tillfällen. När strategierna utförs (Otto och Manja räknar) finns det ett behov till anpassning av strategierna (Moa). För att klassen ska kunna välja strategi ställer läraren en fråga där enbart ett svar utan motivering förväntas av eleverna. Eleverna väljer en strategi och till slut kan de, tillsammans, lösa problemet.

Frågorna ovan lotsar inte eleverna till *hur* de ska lösa en uppgift eller *hur* de ska resonera. Sådana öppna frågor kan hjälpa elever att komma vidare i problemlösningsprocessen utan att bli lotsade till en lösning. Exempel på öppna frågor som vi har sett i exemplen ovan är:

- Vad menade du med …?
- Hur kan vi ta reda på om det stämmer?
- Kan det vara olika?

Läraren kan även ge eleverna förslag på formuleringar genom att omformulera elevernas resonemang och på så vis introducera nya och fler begrepp. Till exempel omformulerade läraren Olivias argument i exemplet ”vilken ska bort” och inkluderade på så vis de korrekta matematiska begreppen kub, cirkel och kvadrat i aktiviteten. Dessa begrepp kunde sedan användas av eleverna i deras fortsatta resonemang där Sagas resonemang för varför stjärnan skulle bort byggde på de begrepp som läraren introducerat (”den runda heter ju cirkel, fyrkanten heter kvadrat och lådan heter kub, men stjärna är stjärna!”).

Inför en gemensam avlutande diskussion i klassen behöver läraren välja ut och ordna några av elevernas lösningar som hjälper resonemangen vidare och som kan lyfta fram viktiga matematiska idéer (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Det kan handla om att synliggöra resonemang som motsäger varandra och diskutera motsägelser eller resonemang som är snarlika där de små detaljerna som skiljer resonemangen kan diskuteras. Genom sådana diskussioner ges eleverna möjlighet att upptäcka matematiska samband och idéer och sammankoppla tidigare erfarenheter med nya. Sammanfattningsvis är det i undervisningen viktigt att läraren stöttar elevers matematiska resonemang och hjälper elever att utforska problemuppgifter.

Referenser

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Jahnke, A. (2016). *Skolans och förskolans matematik: kunskapssyn och praktik*. Lund: Studentlitteratur.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions – five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313–340.

Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2015). Preschool children´s collective mathematical reasoning during free outdoor play. *Journal of Mathematical Behaviour*, 39, 1–10.

Palmér, H. & van Bommel, J. (2018a). Young students' feelings towards problem solving tasks: what does "success" imply? In B. Rott, G. Törner, J. Peters-Dasdemir, A. Möller & Safrudiannur (Eds.), *Views and Beliefs in Mathematics Education: The role of Beliefs in the Classroom* (s. 69–78). Springer International Publishing.

Palmér, H., & van Bommel, J. (2018b). Problem solving in early mathematics teaching: a way to promote creativity? *Creative Education*. 9, 1775–1793