Hur ordet ‘matematisk’ påverkar elevers förklaringar till upptäckter gjorda med ett dynamiskt matematikprogram

SMEER 12 april 2018

Mats Brunström

Maria Fahlgren

Bakgrund

Skolutvecklings- och forskningsprojektet:

Design av datorbaserade uppgifter som skapar matematiskt grundade resonemang

Ett samarbete mellan Älvkullegymnasiet och Kau Läsåret 2016-17

2 forskare + 3 lärare

Totalt 10 elevaktiviteter utvecklades

Forskningsstudie - Bakgrund

- Dynamiska matematikprogram ger elever nya möjligheter att själva upptäcka matematiska samband
- Övertygande visuella intryck kan leda till att elever inte reflekterar kring den bakomliggande matematiken, dvs. övergången från det visuella till det teoretiska är ett kritiskt steg (Joubert, 2017)
- Ett sätt att uppmuntra denna övergång är att be eleverna att förklara sina upptäckter
- Dock är det en utmaning för många elever att veta vad det innebär att förklara i matematik (sociomatematiska normer)
- Uppgifters formulering samt det matematiska innehållet påverkar elevers förklaringar (Levenson, 2013)

Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att undersöka om ordet ’matematisk’ har någon inverkan på elevers förklaringar till observationer av matematiska samband erhållna med ett dynamiskt matematikprogram.

Forskningsfrågor:

Vilken inverkan, om någon, har ordet ‘matematisk’ på elevers förklaringar till observationer gjorda i ett dynamiskt matematikprogram vad gäller

(a) vilken representationsform de använder?

(b) innehållet i elevernas förklaringar?

Studiens kontext

- Kurs: Matematik 2c
- 8 klasser (teknik- och naturvetarprogrammet)
- 229 elever

Datorbaserad elevaktivitet

- Dynamiskt matematikprogram (GeoGebra)
- Syftet med aktiviteten är att introducera grafisk representation av andragradsfunktioner och andragradsekvationer samt att klargöra kopplingen till motsvarande algebraiska representationer
- Aktiviteten består av serie uppgifter innehållande 3 sk ’förklara’-uppgifter
- 2 versioner (U och M)

  Version U: ”Förklara varför…”

  Version M: ”Ge en matematisk förklaring till varför…”

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1. a) Undersök, genom att dra glidare *c*, hur värdet på *c* påverkar grafen. Beskriv med egna ord.

   b) Värdet på konstanten *c* kan avläsas i koordinatsystemet. *Hur?*

   c) Förklara *varför*/ Ge en matematisk förklaring till *varför* värdet på *c* kan avläsas på detta sätt.

2. a) Ställ in glidaren *a* på 0. Beskriv hur grafen ser ut.

   b) Förklara *varför*/Ge en matematisk förklaring till *varför* grafen ser ut som den gör då *a* = 0.

3. a) Lös andragradsekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ algebraiskt (för hand).

b) Ställ in glidarna så att grafen till funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 3$ visas. Lösningarna till motsvarande andragradsekvation, dvs. $x^2 - 4x + 3 = 0$, kan avläsas i koordinatsystemet. *Hur?*

c) Förklara *varför*/Ge en matematisk förklaring till *varför* lösningarna kan avläsas på detta sätt.

Insamlad data från de 3 uppgifterna

Task	Version U	Version M
Task 1	109	100
Task 2	118	106
Task 3	102	99

Om man löser ut c från formeln så får man resultatet att c är lika med värdet minus linjen och kurvan, vilket motsvarar m-värdet.

$$\underbrace{f(x)}_{y} = \underbrace{ax + bx}_{kx} + \underbrace{c}_{m}$$

$$y = kx + m$$

$$kx + c = kx + m$$
$$-kx \qquad -kx$$
$$c = m$$

$$x = 0 \longrightarrow y = m$$

c är den enda termen i formeln som inte har faktorn x. så om x är lika med 0 blir det bara c värdet kvar.

För att när vi rör på glidaren är det grafens position på y-axeln som ändras

En funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kan skrivas på ekvationen $y = ax^2 + bx + c$, Om $x = 0$ är $y = c$. $x = 0$ på y-axeln. $y = c$, alltså c är där grafen skär y-axeln

$ax^2 + bx + c = y$ (om $x = 0$)
$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = y$
$c = y$

$$y = kx + m$$

Eftersom $x=0$ när grafen skär y-axeln, vilket betyder att ax^2 och $bx = 0$ och $y = C$

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$a = 1 \quad b = 2 \quad x = -3$
$f(-3) = 1 \cdot -3^2 + 2 \cdot -3 + c$
$f(-3) = 9 - 6 + c$
$f(-3) = 3 + c$

$f(3) = y$
$y = 3 + c$
$-3 \quad -3$
$-3 = c$

Analys av data - Första frågeställningen

Olika representationsform på elevförklaringarna:

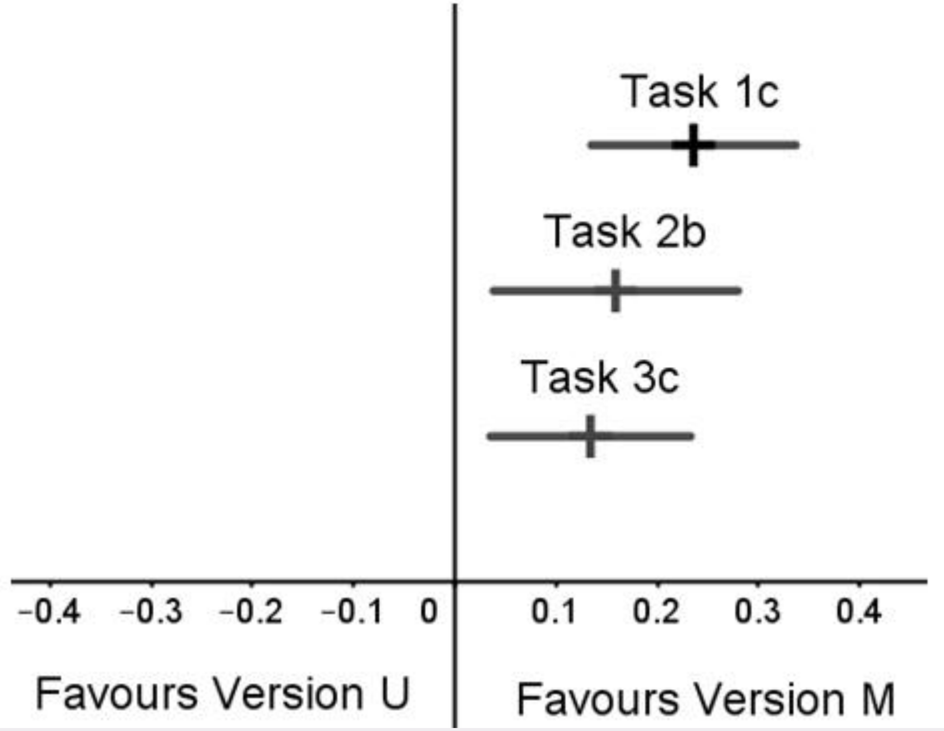
- Verbalt (endast) (V)
- Verbalt med algebraiska element (VeA)
- Algebraiskt (endast) (A)
- Verbalt och algebraiskt (VA)

Expository writing in mathematics

(Shield & Galbraith, 1998)

Resultat – Första frågeställningen

Task	Version	A	VA	A or VA
Task 1c	U	0.0%	6.4%	6,4%
	M	10.0%	20.0%	30.0%
Task 2c	U	0,8%	22.9%	23.7%
	M	11.3%	28.3%	39.6%
Task 3c	U	1.0%	7.8%	8.8%
	M	14.1%	8.1%	22.2%



Comparison between the two groups concerning the use of algebraic symbols only or verbal and algebraic symbols, with 95% confidence interval.

The levels of significance in the tasks are; Task 1c (0.1%), Task 2b (1%), and Task 3c (1%).

Analys av data - Andra frågeställningen

Kodningsmanual med ’Förklaringselement’

Code	Explanation element
A	$x = 0$ gives $y = c$
B	c can be found where the graph intersects the y-axis (i.e. repeats the answer to the previous subtask)
C	Comparing with the standard linear equation, $y = kx + m$
D	c behaves like/corresponds to m
E	c is the constant term
F	c is independent of x
G	c is independent of a and/or b
H	solves for c
I	Providing example
J	Referring to the DMS feedback

Table 3: The categories of explanation element in Task 1c

Inspirationskälla:
Knowledge in Pieces (KiP)
(diSessa, 1993)

S1-1c: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\begin{cases} x = 0 \\ f(x) = c \end{cases}$

$f(x) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$f(x) = c$

S2-1c: "When the value of x is zero the only remaining value is the value of c"

S3-1c: "Because the c value corresponds to the m value in an ordinary $y = kx + m$ function"

S4-1c: "The general formula is $f(x)=ax^2 + bx + c$, c is a constant and doesn't change neither by a, b or x"

S5-1c: "It is where the graph intersects the y-axis. c = the m-value"

S6-1c: "Because when the slider is set to 2, the graph intersects the y-axis at 2."

S7-1c: "c is independent of the value of a and b, $c = y - ax^2 - bx$."

Code	Explanation element
A	$x = 0$ gives $y = c$
B	c can be found where the graph intersects the y-axis (i.e. repeats the answer to the previous subtask)
C	Comparing with the standard linear equation, $y = kx + m$
D	c behaves like/corresponds to m
E	c is the constant term
F	c is independent of x
G	c is independent of a and/or b
H	solves for c
I	Providing example
J	Referring to the DMS feedback

Table 3: The categories of explanation element in Task 1c

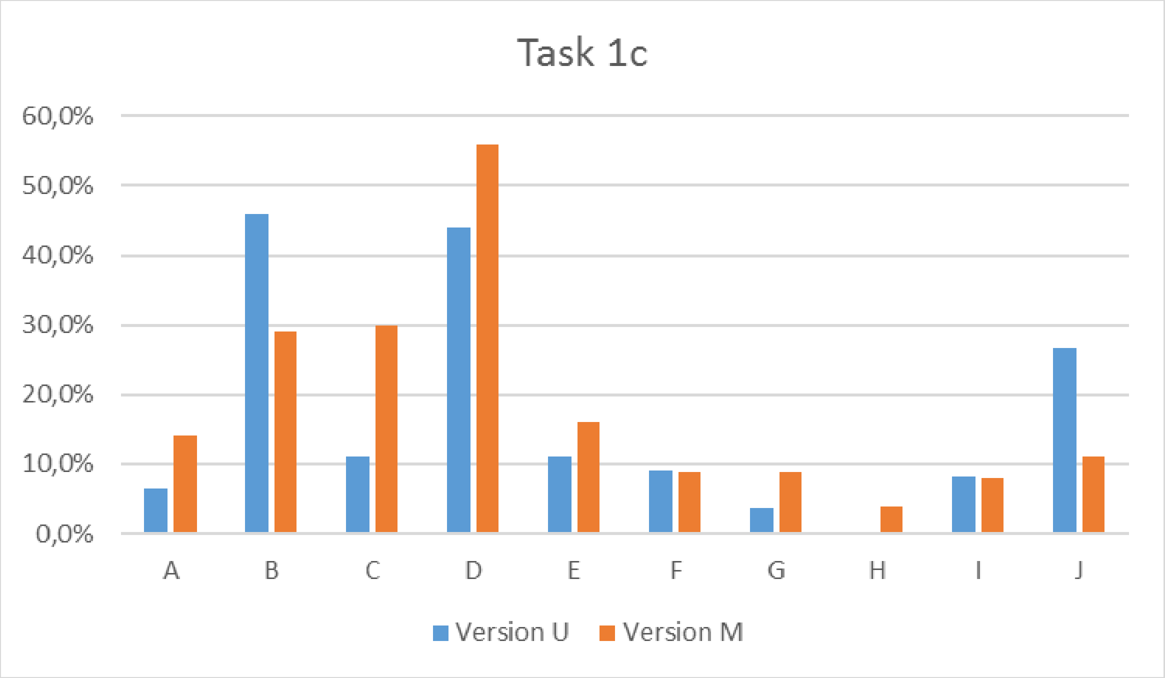
Student response	Elements of explanation										Representation type			
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	V	VeA	VA	A
S1-1c	1													1
S2-1c	1										1			
S3-1c			1	1								1		
S4-1c					1	1	1						1	
S5-1c		1		1							1			
S6-1c									1	1	1			
S7-1c							1	1					1	

Resultat – Andra frågeställningen

Uppgift 1c

Code	Explanation element
A	$x = 0$ gives $y = c$
B	c can be found where the graph intersects the y-axis (i.e. repeats the answer to the previous subtask)
C	Comparing with the standard linear equation, $y = kx + m$
D	c behaves like/corresponds to m
E	c is the constant term
F	c is independent of x
G	c is independent of a and/or b
H	solves for c
I	Providing example
J	Referring to the DMS feedback

Table 3: The categories of explanation element in Task 1c



Uppgift 1c

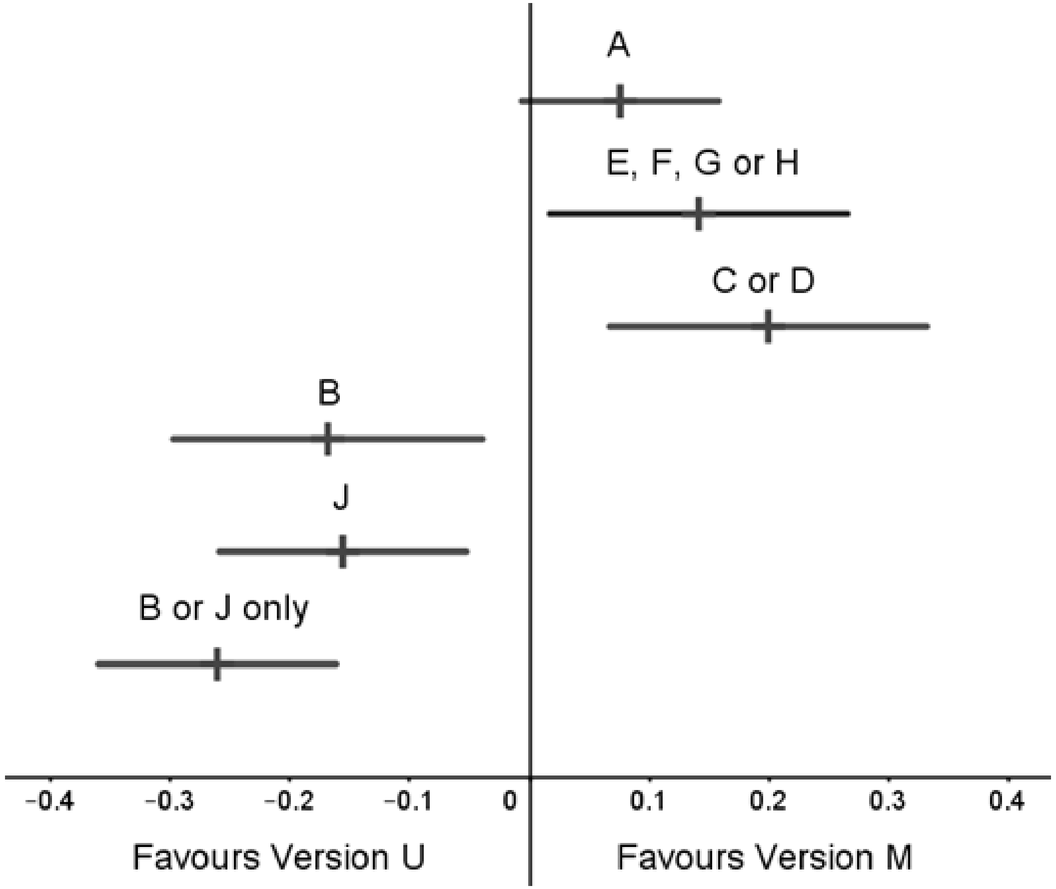


Figure 3: A detailed analysis of some explanation elements in Task 1c, with 95% confidence interval

Code	Explanation element
A	$x = 0$ gives $y = c$
B	c can be found where the graph intersects the y-axis (i.e. repeats the answer to the previous subtask)
C	Comparing with the standard linear equation, $y = kx + m$
D	c behaves like/corresponds to m
E	c is the constant term
F	c is independent of x
G	c is independent of a and/or b
H	solves for c
I	Providing example
J	Referring to the DMS feedback

Table 3: The categories of explanation element in Task 1c

Resultat – Uppgift 2b

2. a) Ställ in glidaren *a* på 0. Beskriv hur grafen ser ut.
   b) Förklara *varför*/Ge en matematisk förklaring till *varför* grafen ser ut som den gör då *a* = 0.

Code	Explanation element
A	($a = 0$) gives $bx + c$
B	($a = 0$) gives $kx + m$
C	It is a straight line (equation)
D	It is not a second degree function
E	$a = 0$ gives $0 \cdot x^2 + bx + c$
F	$a = 0$ gives $0 \cdot x^2 = 0$
G	$a = 0$ gives that the term ax^2 disappears
H	$x = 0$ gives $x^2 = 0$
I	Providing example

Table 5: The categories of explanation element in Task 2b

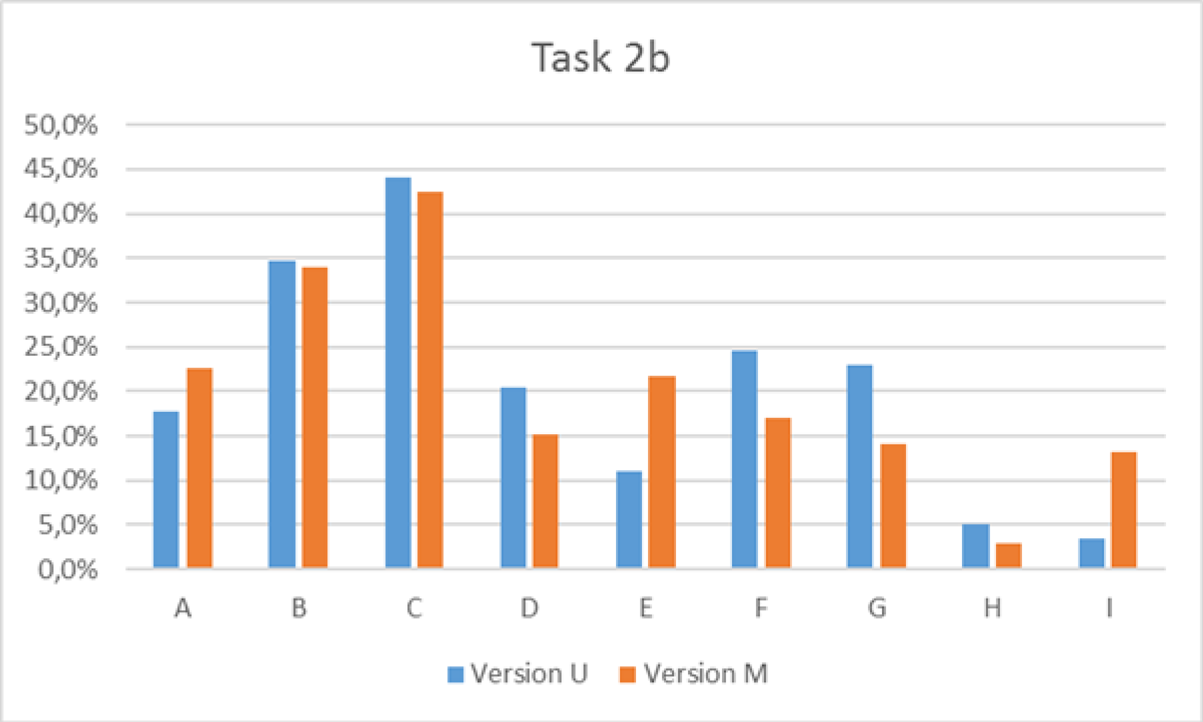


Figure 4: An overview of the presence of the explanation elements introduced in Table 5

Uppgift 2b

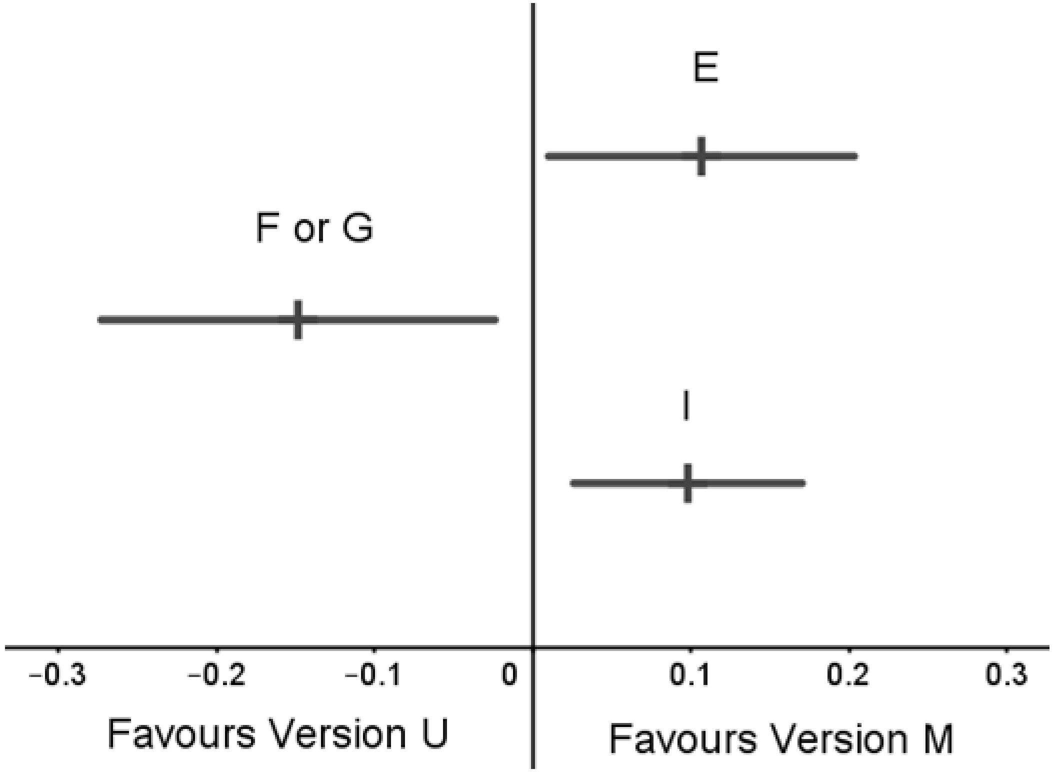


Figure 5: A detailed analysis of some explanation elements in Task 2b, with 95% confidence interval

Code	Explanation element
A	$(a = 0)$ gives $bx + c$
B	$(a = 0)$ gives $kx + m$
C	It is a straight line (equation)
D	It is not a second degree function
E	$a = 0$ gives $0 \cdot x^2 + bx + c$
F	$a = 0$ gives $0 \cdot x^2 = 0$
G	$a = 0$ gives that the term ax^2 disappears
H	$x = 0$ gives $x^2 = 0$
I	Providing example

Table 5: The categories of explanation element in Task 2b

Resultat – Uppgift 3c

3. a) Lös andragradsekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ algebraiskt (för hand).

b) Ställ in glidarna så att grafen till funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 3$ visas.
Lösningarna till motsvarande andragradsekvation,
dvs. $x^2 - 4x + 3 = 0$, kan avläsas i koordinatsystemet. *Hur?*

c) Förklara *varför*/Ge en matematisk förklaring till *varför*
lösningarna kan avläsas på detta sätt.

Code	Explanation element
A	Express '$y = 0$'
B	Relates '$y = 0$' to the intersection with the x-axis
C	Express that $y = 0 = f(x)$
D	Referring to two solutions/values of x
F	Referring to the *pq*-formula
G	Verifying the solution, e.g. inserting the values 1 and 3 in the equation
H	Referring to the DMS feedback

Table 7: The categories of explanation element in Task 3c

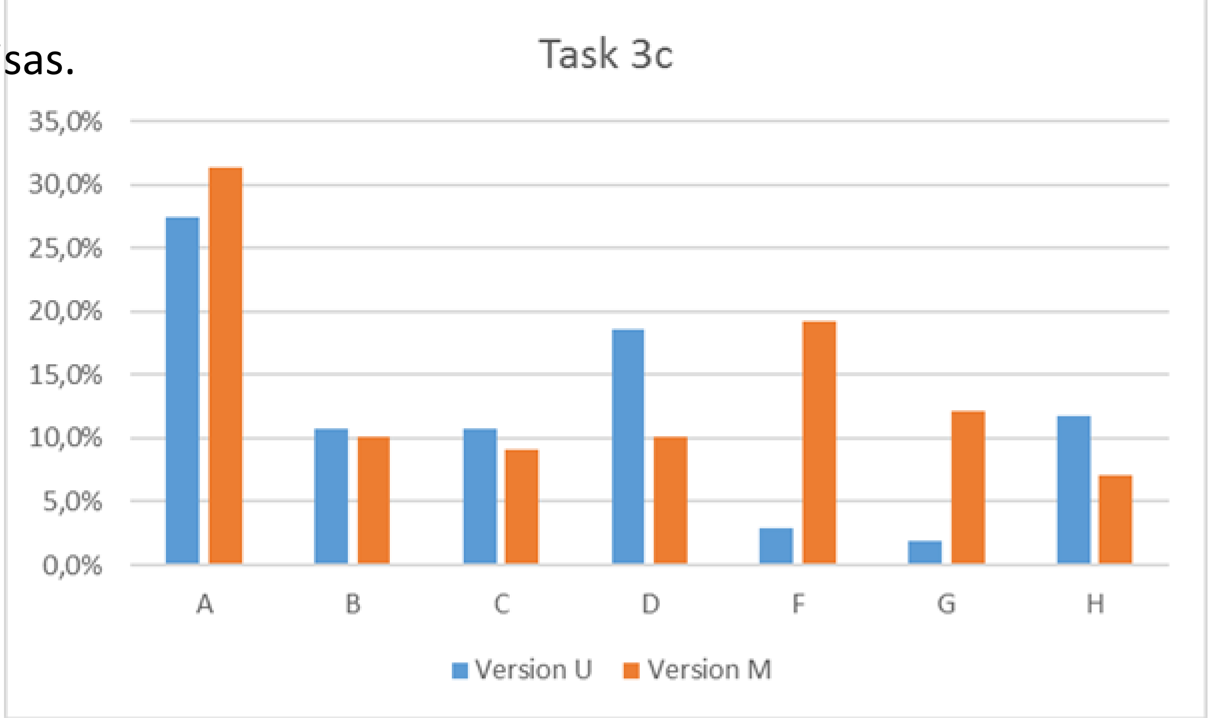


Figure 6: An overview of the presence of the explanation elements introduced in Table 7

Uppgift 3c

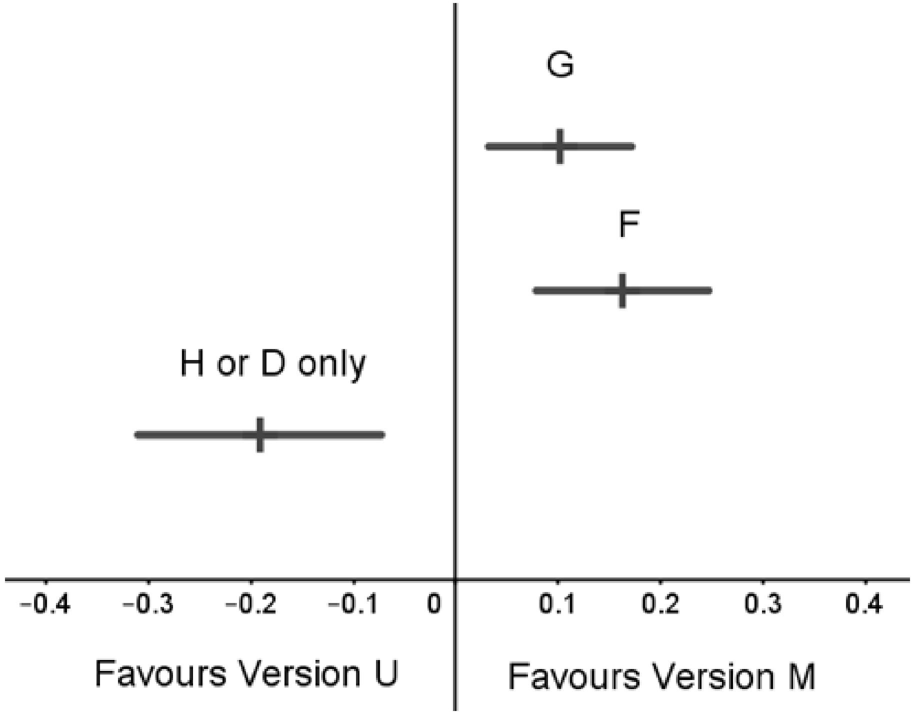


Figure 5: A detailed analysis of some explanation elements in Task 3c, with 95% confidence interval

Code	Explanation element
A	Express '$y = 0$'
B	Relates '$y = 0$' to the intersection with the x-axis
C	Express that $y = 0 = f(x)$
D	Referring to two solutions/values of x
F	Referring to the *pq*-formula
G	Verifying the solution, e.g. inserting the values 1 and 3 in the equation
H	Referring to the DMS feedback

Table 7: The categories of explanation element in Task 3c

Resultat - sammanfattning

- Resultatet visar signifikanta skillnader mellan grupperna, både vad gäller representationsform och innehållet i elevernas förklaringar
- Elever som ombads ge en ‘matematisk’ förklaring använde i större utsträckning algebraiska symboler och algebraiskt grundade argument
- Elever som ombads ge en ‘matematisk’ förklaring var mer benägna att referera till tidigare kunskaper (linjär analogi)
- Elever som endast ombads förklara var mer benägna att hänvisa till feedback från det dynamiska matematikprogrammet som förklaring (visuellt)
- Elever som endast ombads förklara var mer benägna att upprepa svaret från föregående uppgift (dvs. beskriva istället för förklara).

Slutsats

En viktig fråga att beakta vid design av uppgifter anpassade till ett dynamiskt matematikprogram är enligt Joubert (2017):

“Does it require the students to move between the visual and abstract fields?” (p. 36)

Resultaten från vår studie indikerar att ordet ’matematisk’ uppmuntrar elever att gå från det visuella till det teoretiska

Referenser

DiSessa, A. A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and instruction, 10*(2-3), 105-225.

Joubert, M. (2017). Revisiting Theory for the Design of Tasks: Special Considerations for Digital Environments. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks* (pp. 17-40). Dordrecht: Springer.

Levenson, E. (2013). Exploring one student's explanations at different ages: the case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 181-203.

Shield, M., & Galbraith, P. (1998). The analysis of student expository writing in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 36*(1), 29-52.

Stort tack för visat intresse!