Karlstads GeoGebrainstitut
Institutionen för matematik och datavetenskap
Karlstads universitet

Mats Brunström
Maria Fahlgren

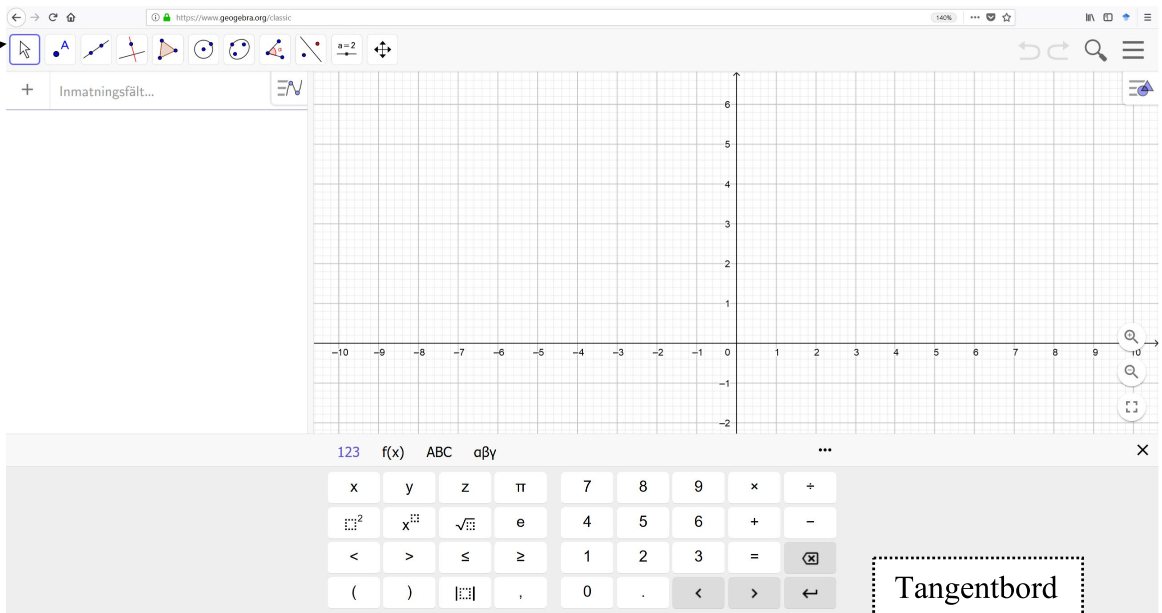
Introduktionsguide

GeoGebra åk 7-9 & gy

Innehåll

GeoGebrafönstret

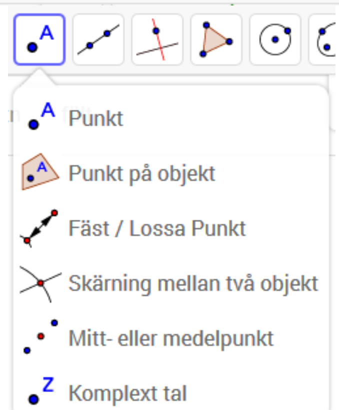
På hemsidan www.geogebra.org kan man välja om man vill ladda ned programmet eller köra en web-version. Ladda ned GeoGebra Classic 6 (under ”Classic Apps”) eller välj ”GeoGebra Classic” (under ”Classic-appar”) för att komma till följande standardvy:



I denna standardvy visas ett **Algebrafönster** med **Inmatningsfält**, ett **Ritområde** samt ett **Tangentbord** (som kan klickas bort då det inte används).

Överst i fönstret finns en verktygsrad

Under varje Verktyg i Verktygsraden finns en lista med ytterligare verktyg, som syns när man klickar på Verktygsrutan:



Språk

Språket ändras genom att:

- Klicka på de tre vågräta strecken i övre högra hörnet: 
- Välj ”Inställningar” och byt språk i den översta rullistan

Olika fönster

Genom att trycka på de tre vågräta strecken i övre högra hörnet: fås en meny fram där man kan välja ”**Visa**” för att öppna ytterligare fönster. Bland annat finns här **”Kalkylblad”, ”CAS"** och ytterligare ritområden: ”**Ritområde 2**” samt ”**Ritområde 3D**”.

Nytt fönster

Skapa **nytt fönster**. Detta görs genom att markera de tre vågräta strecken uppe i högra hörnet. Här väljer du först ”Arkiv” och därefter ”Spara och börja om”.

I pop-up fönstret :

...väljer du ”Spara inte”

Naturligtvis går det att spara GeoGebra-filen, antingen på egna datorn eller på ett (eget skapat) GeoGebra-konto.

Punkter, linjer och sträckor

I denna del kommer vi endast att arbeta med geometriska begrepp och behöver därför inte ha koordinatsystem (och rutnät) eller ”Algebrafönster” framme.

- Därför börjar vi med att klicka på (högst uppe i högra hörnet) och välja Perspektiv och därefter Geometri
- Lägg in en punkt i ritområdet med hjälp av verktyget:
    - Klicka först på och därefter någonstans i Ritområdet

OBS! För att kunna flytta punkten måste man först klicka på:

OBS! om man vill ångra en inmatning, tryck på uppe i högra hörnet.

- Testa hur verktygen för linje ( ) respektive sträcka ( ) fungerar.
    - Klicka på (eller , som finns under)
    - Klicka därefter någonstans i ritområdet för att markera första punkten och därefter klicka någonstans för att markera den andra punkten.

Polygoner och cirklar

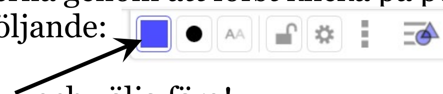
- Konstruera en triangel med verktyget .
    - Klicka på:
    - Klicka därefter någonstans i ritområdet för att markera första punkten, därefter markeras de övriga 2 punkterna (lika med polygonens hörn) valfritt i ritområdet.
    - Avsluta genom att klicka i den första punkten!
- Prova att flytta runt triangeln – klicka först på och därefter på triangeln och "dra" den.
- Prova även att flytta något av triangelns hörn.
- Konstruera en cirkel med verktyget .
    - Klicka på .
    - Klicka därefter någonstans i ritområdet för att först markera cirkelns medelpunkt och därefter en punkt på cirkelns periferi.
- Prova att flytta hela cirkeln (genom att första markera cirkelns *periferi* ( ) och därefter "dra" den).
- Prova att ändra cirkelns storlek (genom att dra i cirkelns periferipunkt).

Symmetrier

Spegelsymmetri

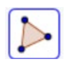
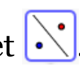
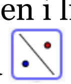
Konstruera spegelsymmetri

- Skapa nytt fönster (utan koordinataxlarna och rutnätet).
- Konstruera en linje genom två punkter med verktyget .
- Lägg in ytterligare en punkt (utanför linjen) med verktyget .
- Spegla punkten i linjen med verktyget . En spegelpunkt skapas.
    - Klicka på
    - Klicka därefter först på punkten och därefter på linjen, så att en spegelpunkt skapas.

- Ändra färg på någon av punkterna genom att först klicka på punkten (OBS! ).
  Då visas uppe i högra hörnet följande:  (Eventuellt måste först  markeras)

  Byt färg genom att klicka här och välja färg!

- Sätt spår på punkterna genom att högerklicka på respektive punkt och markera ”Visa spår”.

- Rita en frihandsfigur genom att dra i punkten! (OBS! )
- Radera punken (och dess spår). ”Ctrl + F” raderar spår.
- Konstruera en valfri polygon och spegla i linjen.
  - Klicka på 
  - Välj antingen ”Polygon” eller ”Regelbunden polygon” (alla sidor och vinklar lika stora).
- Spegla polygonen i linjen med verktyget .
  - Klicka på 
  - Klicka någonstans inuti polygonen och därefter på linjen, så att en spegling av polygonen skapas.
- Ändra på polygonen (genom att flytta på den eller dra i något hörn).
- Prova att flytta speglingslinjen (genom att dra i någon av punkterna som ligger på linjen).

Förslag på elevaktiviteter

1) Låt eleverna konstruera en valfri polygon i ett ritområde (rutat) och med en spegellinje.

Tips! Här kan man som lärare skapa ett eget anpassat arbetsblad i GeoGebra. Se instruktion i slutet av detta häfte!

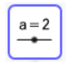
Därefter får en annan elev i uppgift att försöka konstruera (med hjälp av polygonverktyget) en spegelbild till figuren (i spegellinjen).

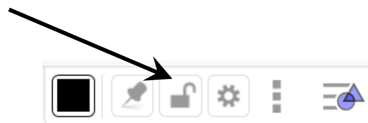
Slutligen speglar man den ursprungliga figuren med spegelverktyget och undersöker om speglingen sammanfaller med den konstruerade polygonen.

Tips! För att öka svårigheten, kan här användas isometriskt rutnät genom att klicka på  och markera .

Ladda upp egna bilder

Så här laddar man upp bilder i GeoGebra:

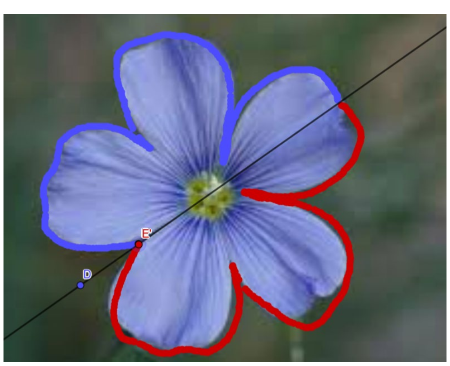
- Klicka på verktyget  som finns under  .
- Välj en ”egen” bild från din dator eller hämta bild från Internet (måste sparas någonstans på din dator).
- Justera position och storlek på bilden (genom att dra i dess punkter i nedre hörnen).
- Lås fast bilden i Ritområdet genom att först klicka på bilden och därefter på  uppe i högra hörnet och slutligen på



Undersöka och upptäcka spegelsymmetri

- Skapa nytt fönster (utan koordinataxlarna och rutnätet).
- Ladda upp valfri bild, gärna med någon symmetri (t.ex. blomma, fjäril).
- Högerklicka på bilden och välj ”Inställningar”. Markera därefter ”Bakgrundsbild” (under fliken ”Grundinställningar”).
- Konstruera en (spegel)linje genom två punkter med verktyget .
  - Justera linjens placering (genom att dra i någon av punkterna) så att linjen blir en symmetrilinje.

- Nu skall vi undersöka om figuren (på bilden) är symmetrisk:
  - Konstruera en punkt någon stans i Ritområdet.
  - Spegla punkten i symmetrilinjen.
  - Placera (den fria) punkten någonstans på figurens rand.
  - Byt gärna färg på någon av punkterna.
  - Sätt spår på punkterna!
  - Dra den (fria) punkten längsmed figurens rand.
  - Framträder en symmetrisk bild? Ja, då verkar vi ha hittat en symmetrilinje och kan konstatera att figuren är (spegel)symmetrisk.



Parallellförflyttning/Translation

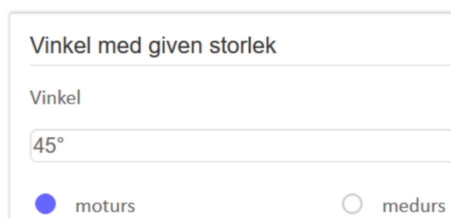
- Skapa nytt fönster (utan koordinataxlarna och rutnätet).
- Konstruera en valfri polygon med verktyget .
- Skapa en vektor (en pil som beskriver en förflyttning) mellan 2 punkter:
    - Klicka på , som finns under .
    - Klicka därefter någonstans i Ritområdet för att markera första punkten, därefter någon annanstans för att markera andra punkten.
- Nu ska vi parallellförflytta polygonen enligt den vektor (pil) som vi skapat:
    - Klicka på , som finns under
    - Klicka någonstans inuti polygonen och därefter på vektorn, så att en ny (parallellförflyttad) polygon skapas.
- Prova att flytta polygonen genom att ändra på vektorn (dra i någon av punkterna). OBS! Glöm ej att först markera
- Prova att ändra på polygonen!

Rotationssymmetri

- Skapa nytt fönster (utan koordinataxlarna och rutnätet).
- Konstruera en valfri polygon med verktyget .
- Vi ska nu rotera polygonen, t.ex. 45 grader moturs.
    - Skapa en punkt någonstans i ritområdet (lika med rotationscentrum).

    OBS! Som rotationspunkt kan även någon av polygonens hörn väljas!

    - Klicka på , som finns under .
    - Klicka först på polygonen och därefter på den fria punkten. Nu kommer följande pop-up fönster fram:



    - Välj vinkel (om du vill ha någon annan än den förinställda som är 45^0) samt markera ”moturs” eller ”medurs”.
- Prova att flytta på den fria punkten!
- Prova att ändra på polygonen!

Ändra rotationsvinkeln med hjälp av en ”glidare”

I GeoGebra finns ett kraftfullt verktyg för dynamisk visualisering, som kallas ”Glidare” (på engelska ”slider”). Vi ska här undersöka hur detta verktyg kan användas för att enkelt ändra rotationsvinkeln.

- Skapa nytt fönster (utan koordinataxlarna och rutnätet).

- Klicka på verktyget och därefter i Ritområdet där du vill placera glidaren. Nu visas följande ruta:
- Markera ”Vinkel” här:

OBS! Bokstavssymbolen för vinkeln är automatiskt en bokstav ur det grekiska alfabetet. Det går bra att ändra till en ”vanlig” bokstav (t.ex. ”v”) om man vill

- Konstruera en polygon ( ) samt en punkt ( ).
  - Klicka på , som finns under .
  - Klicka först på polygonen och därefter på den fria punkten.
  - I pop-up fönstret skriver du in namnet på din ”glidare” (t.ex. ”v”), istället för det förinställda ”45°”.
- Prova att ”dra” i glidaren så att vinkeln ändras!
- Testa gärna ”Animation”: Högerklicka på glidaren och markera ”Animation”.

Tips! Man kan ändra animationen, t.ex. dess hastighet. Högerklicka på glidaren och välj ”Inställningar”. Under fliken ”Glidare” kan man nu ändra det förinställda värdet 1 till exempelvis 5 i fältet ”Animationshastighet”.

Vinklar i en triangel

Vi ska nu konstruera en triangel, mäta dess vinklar och beräkna vinkelsumman.

- Skapa nytt fönster (utan koordinataxlarna och rutnätet).
- Konstruera en triangel ( )
- Mät triangelns vinklar med verktyget

OBS! Ordningen man väljer att markera punkter eller linjer på har betydelse för vilken vinkel man får – undersök!

Tips! Antalet decimaler kan ändras under ”Inställningar” ( ).

- Beräkna triangelns vinkelsumma genom att addera vinklarna i inmatningsfältet: $\alpha + \beta + \gamma$
  Notera nu att vinkelsumman finns i algebrafönstret:

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma$$
$$\rightarrow \; 180°$$

- Dra i hörnen på triangeln och se hur de olika vinklarna ändras, samtidigt som vinkelsumman är konstant!

Area och omkrets

- Skapa nytt fönster *utan* koordinataxlar men *med* rutnät (högerklicka någonstans i Ritområdet och markera ”Rutnät”).

Tips! Det går att ändra inställningen på rutnätet till ett ”centimeter-rutat”:

  - Högerklicka någonstans i Ritområdet och välj Ritområde ...
  - Under fliken ”Rutnät”, vid ”Typ av rutnät”, välj ”Enbart första nivåns linjer”.

- Konstruera en rektangel med verktyget .

Tips! Det finns möjlighet att välja att punkterna endast fäster i rutnätet:

  - Klicka någonstans i Ritområdet och därefter på uppe i högra hörnet (bakom). Välj här ”Låst till rutnätet”.

- Mät rektangelns sidor med verktyget , som finns under
  - Klicka på en sida för att få dess längd utskriven.
- Prova att flytta något av rektangelns hörn.
- För att få rektangelns omkrets, klicka på och därefter inuti rektangeln.
- Prova återigen att flytta något av rektangelns hörn.
- Rektangelns area fås med verktyget , som finns under

Area och omkrets hos trianglar med samma bas och höjd

Vi ska nu göra en konstruktion som kan vara användbar för att studera trianglar med samma area men olika omkrets.

- Skapa nytt fönster (utan koordinataxlarna och rutnätet).
- Konstruera en linje genom två punkter med verktyget .
- Lägg in ytterligare en punkt C (utanför linjen).
- Konstruera en ny linje, parallell med den förra, och som går genom C:
- Lägg in en ny punkt (D) på den parallella linjen (den sist konstruerade linjen).
- Konstruera en triangel med punkterna A, B och D som hörn. Dölj gärna punkten C.
- Mät triangelns area respektive omkrets.
  - Klicka på , som finns under .
  - Klicka någonstans (inuti) triangeln.
  - Klicka på , som finns under .
  - Klicka därefter åter på triangeln.
- Dra i punkten D och undersök hur dess läge påverkar omkrets och area!

Likformighetsavbildning (skala)

- Skapa nytt fönster *utan* koordinatsystem och rutnät.
- Infoga ett geometriskt objekt, t.ex. en polygon.
  - Skapa en polygon ( ).
- Vi ska nu förstora eller förminska polygonen med hjälp av verktyget :
  - Skapa en punkt ( ) någonstans i ritområdet.
  - Klicka på , som finns under .
  - Klicka först på polygonen och därefter på den fria punkten.
  - I pop-up fönstret matas in ”Skalfaktor”, t.ex. 2, vilket innebär en förstoring i skalan 2:1.
- Flytta på punkten ( ) och undersök hur detta påverkar avbildningens position.
- För att undersöka hur skalfaktorn påverkar avbildningens utseende kan med fördel ”glidare” användas.
  - Öppna nytt fönster och skapa en polygon och en punkt (som ovan).
  - Klicka på verktyget och därefter någonstans i Ritområdet.
  - Gör följande inställningar under fliken Intervall:

OBS! Intervallet samt steglängden anpassas efter elevgruppen!

OBS! Som decimalkomma används punkt!

  - Klicka därefter på OK
  - Klicka på och därefter först på polygonen och därefter på punkten.
  - I pop-up fönstret anges nu namnet på glidaren som ”Skalfaktor”.

Förslag på elevaktivitet

Låt eleverna mäta och jämföra omkrets och area hos en polygon och dess avbildning. Exempelvis kan de undersöka vad som händer med arean om omkretsen fördubblas (dvs om skalfaktorn är 2).

Koordinatsystem och linjära samband

Punkter (fria och oberoende)

- Skapa nytt fönster *med* koordinataxlar samt rutnät.
- Flytta på koordinatsystemet genom att först markera verktyget och därefter klicka någonstans i Ritområdet och dra!

Tips! Det går att ändra inställningen på rutnätet så att färre linjer visas:

- Högerklicka någonstans i Ritområdet och välj Ritområde ...
- Under fliken ”Rutnät”, vid ”Typ av rutnät”, välj ”Enbart första nivåns linjer”.

- Vi skall nu även använda Algebrafönstret:
  - Klicka på (uppe i högra hörnet) och markera ”Algebrafönster” under ”Visa”. Nu visas även Algebrafönstret till vänster!
- Lägg in en punkt i koordinatsystemet med hjälp av verktyget
- Notera punktens koordinater i Algebrafönstret (till vänster).
- Flytta punkten ( ) och studera hur punktens koordinater ändras i algebrafönstret.

Tips! Det finns möjlighet att välja att punkten endast fäster i rutnätet:

- Klicka någonstans i Ritområdet och därefter på uppe i högra hörnet (bakom).Välj här ”Låst till rutnätet”.

- Undersök hur man kan ändra egenskaper hos punkten:
  - Markera punkten (genom att klicka på den).
  - Undersök hur man kan ändra färg, form och storlek på punkten:

  - Genom att markera och därefter välja ”Namn och värde” eller ”Värde”, får man punktens koordinater utskrivna (även i Ritområdet).

- Ett annat sätt att lägga in punkter på är genom att skriva in punktens koordinater, t.ex. (1,2), i Inmatningsfältet till vänster. Gör detta!
- Det är enkelt att dölja ett objekt genom att avmarkera (klicka på) bollen , framför objektet i Algebrafönstret. Testa!

Räta linjen

Vi ska nu undersöka hur glidare kan användas för att studera hur grafen till den linjära funktionen $y = kx + m$ ändras för olika värden på parametrarna k och m.

- Öppna nytt fönster *med* koordinataxlar samt rutnät.
- Skapa två glidare k och m.
  - Klicka på verktyget och därefter någonstans i Ritområdet.
  - Gör följande inställningar under fliken Intervall:

  - Ändra namnet på glidare till ”k”
  - Lägg in ytterligare en glidare och kalla den ”m” (samma steglängd som ovan).

Tips! Genom att peka på glidaren och hålla ned höger musknapp, kan glidaren flyttas omkring på skärmen.

- Mata in räta linjens ekvation, $y = kx + m$, i inmatningsfältet.

Tips! Med verktyget flyttas hela koordinatsystemet. Flytta eventuellt koordinatsystemet, så att origo blir mer centrerat.

- Dra i glidarna (markera först) och undersök hur de olika parametrarna k och m påverkar grafens utseende. Observera samtidigt hur det algebraiska uttrycket ändras i Algebrafönstret.
- Lägg in en punkt på linjen. Dra punkten längs linjen och studera samtidigt punktens koordinater i Algebrafönstret.

Elevaktivitet: Linjära funktioner

Bilaga 1 är en elevaktivitet som har utarbetats tillsammans med lärare och testats på inledande kurs inom gymnasieskolan. Eleverna kan med fördel arbeta parvis med aktiviteten. Arbetsbladet innehåller ”rutor” där eleverna ska formulera sina slutsatser skriftligt med egna ord.

Funktioner och derivata

Vi ska här undersöka hur *glidaren* kan användas för att studera hur grafen till tredjegradsfunktionen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ändras för olika värden på parametrarna a, b, c och d.

- Öppna nytt fönster (*med* koordinataxlar samt rutnät).
- Mata in tredjegradspolynomet $ax^3 + bx^2 + cx + d$ i inmatningsfältet.

  OBS! Efter att en exponent matats in, tryck pil höger (på tangentbordet)!

  Notera hur 4 glidare automatiskt skapas i algebrafönstret. Genom att klicka på: ◯ , kan man få glidaren synlig även i Ritområdet.
- Flytta koordinatsystemet så att origo hamnar mitt i Ritområdet.
- Dra i glidarna, och undersök hur de olika parametrarna a, b, c och d påverkar grafens utseende. Observera samtidigt hur det algebraiska uttrycket ändras.

Tips! Formeln (som finns i Algebrafönstret) kan enkelt flyttas in i koordinatsystemet genom att klicka på den och ”dra” den.

- Undersök verktygen för *extrempunkt* och *nollställe* , som finns under

Tips! När man studerar funktioner är det viktigt att kunna justera skalan på koordinataxlarna. Detta kan göras på 2 olika sätt: dels genom att zooma in/ut och dels genom att justera endast *en* axel.

- För att zooma: Markera först och scrolla därefter.

- För att justera skalan på en axel: Markera först och ”dra” därefter i axeln.

Elevaktivitet: Andragradsfunktioner

Bilaga 2 är en elevaktivitet som har utarbetats tillsammans med lärare och testats på gymnasiets kurs Matematik 2c. Aktiviteten är en introduktion till andragradsfunktioner. Eleverna har tidigare arbetat algebraiskt med att lösa andragradsekvationer med hjälp av *pq*-formeln. Eleverna kan med fördel arbeta parvis med aktiviteten. Arbetsbladet innehåller ”rutor” där eleverna ska formulera sina slutsatser skriftligt med egna ord.

Derivata

Vi skall nu studera derivatan till funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

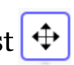
- Ställ in glidarna så att grafen till funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ visas.
- Lägg in en punkt *A* någonstans på grafen. Kontrollera att punkten följer grafen när du drar i punkten.
- Utgår från grafen ovan!
- Lägg in en **tangent** till grafen, i punkten *A*, med verktyget , som finns under
- Mät tangentens lutning med verktyget , som finns under
- Genom att flytta punkten *A* flyttas även tangenten och man kan studera hur dess lutning, dvs. funktionens derivata, ändras.
- För att studera funktionens derivata lägger vi in en ny punkt *B* med samma *x*-koordinat som *A* men med *y*-koordinaten lika med tangentens lutning, *k*.
    - Skriv i inmatningsfältet: B = (x(A), k)
- Flytta punkten *A* och studera samtidigt punkten *B´s* förflyttning.
- Högerklicka på punkten *B* och markera ”Visa spår”. Nu kommer punkten att lämna spår efter sig då *A* förflyttas och vi får funktionens derivata uppritad!
- Derivatan till funktionen kan även ritas upp genom att skriva $f'(x)$ i inmatningsfältet.
- Med verktyget *Funktionsinspektören* , som finns under , kan man bland annat undersöka en funktions nollställen, extrempunker, integral och hur dessa ändras då man ändrar funktionens definitionsmängd. Testa!

Trigonometriska funktioner

Vi ska nu använda *GeoGebra* för att rita funktionen $y = \sin x$, både då x anges i radianer och i grader.

- Öppna nytt fönster *med* koordinataxlar samt rutnät.
- Skriv in $f(x) = \sin(x)$ i inmatningsfältet.
- Gradera x-axeln i *radianer*.
    - Högerklicka någonstans i Ritområdet och välj ⚙ Ritområde ...
    - Under fliken ”xAxeln”, markera ”Avstånd” och välj $\pi/2$.
    - Som ”Enhet” välj π.

Om vi istället vill ha vinkeln x i *grader* blir det lite annorlunda:

- Öppna nytt fönster *med* koordinataxlar samt rutnät.
- Skriv in $f(x) = \sin(x^{\circ})$ i inmatningsfältet. Tecknet för grader (^{0}) finns under fliken ”f(x)”: 123 f(x) ABC αβγ i tangentbordets meny.
- Gradera x-axeln i *grader*.
    - Högerklicka någonstans i Ritområdet och välj ⚙ Ritområde ...
    - Under fliken ”xAxeln”, markera ”Avstånd” och skriv in 60: ☑ Avstånd: 60
    - Som ”Enhet” välj grader (^{0}).
    - Nu kan x-axeln behöva justeras. Markera först  och ”dra” därefter i axeln.

Kalkylblad och regression

Vi ska nu se exempel på hur en tabell i kalkylbladet kan läggas in som punkter i ritområdet och hur det sedan är möjligt att anpassa en funktion (t.ex. ett andragradspolynom) utifrån dessa punkter.

- Öppna nytt fönster *med* koordinataxlar samt rutnät.
- Öppna ett kalkylblad.
    - Under ”Inställningar” (☰), välj ””Visa” samt markera ”Kalkylblad”.
- Fyll i cellerna A1 – B3 på följande sätt:

	A	B
1	1	3
2	3	6
3	5	5

- Markera cellerna A1-B3, högerklicka och välj ”Skapa” och därefter ”Lista med punkter”

I algebrafönstret finns nu en lista (l1) som består av tre punkter: (1,3), (3,6) och (5,5). Dessutom kan man nu se punkterna i ritområdet.

- Skriv in ”reg” i inmatningsfältet och välj: **Reg**ressionPoly(<Lista med punkter>, <Polynomgrad>)
- Skriv in RegressionPoly(l1, 2) i inmatningsfältet.
- Lägg in andragradspolynomets formel, som nu finns i algebrafönstret, i ritområdet genom att markera formeln och ”dra” den till ritområdet.
- Ändra något värde i tabellen och studera hur motsvarande punkt flyttas, hur grafen anpassas, hur punkten ändras i lista 1 (l1) i algebrafönstret och hur funktionsformeln ändras.
- Dra i någon av punkterna och studera hur motsvarande värden ändras i tabellen, hur grafen anpassas, hur punkten ändras i lista 1 (l1) i algebrafönstret och hur funktionsformeln ändras

Skapa anpassat arbetsblad i GeoGebra

Förberedelse: Skapa ett konto:

- Gå in på hemsidan: www.geogebra.org.
- Klicka på LOGGA IN , i övre högra hörnet.
- Välj ”Skapa konto” och följ instruktionerna.

Vi ska nu skapa ett arbetsblad ”Spegling i linje” bestående av

- ett Ritområde med rutnät
- en fast spegellinje (dvs. som inte går att flytta)
- endast verktygen för ”Flytta”, ”Polygon” och ”Spegling”

- Gå in på din Profil (i menyn till vänster) och välj därefter NY AKTIVITET
- Klicka på GeoGebra applet och välj därefter ”Skapa applet” i pop-up fönstret som visas.
- Klicka på ”Geometri” för att få fram en ”Geometri-app”. Nu skall vi anpassa denna enligt önskemålen ovan:
    - Välj ”Inga nya objekt” vid ”Namn på objekt” under ”Inställningar” (☰)
    - Ta fram Rutnät genom att högerklicka någonstans i Ritområdet och välj Ritområde ...
    - Klicka i ”Visa rutnät” under fliken ”Rutnät”.
    - Vid ”Typ av rutnät”, välj ”Enbart första nivåns linjer”
    - Vid ”Linjetyp”, välj --- .

- Konstruera spegellinje (lodrät).
    - Dölj punkterna genom att högerklicka på dem och avmarkera ”Visa objekt”. OBS! Glöm ej !
    - Fäst spegellinjen genom att först markera den därefter klicka på (bakom) så att den blir låst ( ).
- Anpassa verktygsfältet genom att välja vilka verktyg som skall kunna användas:
    - Klicka på ”Verktyg” under och välj ”Anpassa verktygsfält”.
    - Ta bort de verktyg som du inte vill att eleverna skall ha tillgång till genom att dra dem till höger (under ”Verktyg”)

      I exemplet vill vi bara ha tillgång till följande verktyg: , och .
    - Markera ”Verkställ”.
    - Markera nu ”Klar” (nere i högra hörnet).

- Färdigställ ditt arbetsblad genom att ange rubrik. Under ”Avancerade inställningar” kan du välja vad som skall visas för eleverna. I exemplet vill vi visa verktygen, därför skall ”Visa verktygsfältet” vara ikryssat.
- Innan du sparar, kan du välja ”Privat” och vänta med att dela arbetsbladet tills du är säker på att det fungera som det skall.
- Dela arbetsbladet:
    - Gå in på din sida (ditt konto) och välj ”Resurser” och därefter ”Egna”. Här kan du nu se ditt arbetsblad.
    - Klicka på och välj Dela . I pop-up fönstret får du en länk som du kan kopiera och dela. Det finns även möjlighet att dela arbetsbladet i Google Classroom eller OneNote.

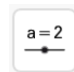
LINJÄRA FUNKTIONER

DEL 1

Vi ska nu använda *GeoGebra* för att studera *linjära funktioner*.

- Öppna ett nytt fönster. Om koordinatsystem och rutnät inte visas tas dessa fram genom att högerklicka i ritområdet och markera ”Rutnät” och ”Visa axlar”.

En linjär funktion kan alltid skrivas på formen $y = kx + m$, där *k* och *m* är konstanter. Vi ska undersöka hur funktionens graf påverkas av värdena på dessa konstanter.

- Lägg in *k* och *m* som glidare genom att använda verktyget: 

- Ändra ”Namn” på glidarna. Ena glidaren skall heta ”*k*” och den andra ”*m*”.
- Ändra även ”Min” och ”Max” samt ”Steglängd” som nedan:

Tips: Genom att peka på en glidare och hålla ned höger musknapp, kan glidaren flyttas omkring på skärmen.

- Flytta hela koordinatsystemet så att origo hamnar i mitten på skärmen. Använd: 
- Mata in funktionen $\boldsymbol{y = kx + m}$ i inmatningsfältet.
- Lägg in formeln, som nu finns i algebrafönstret, i ritområdet genom att markera formeln och ”dra” den till ritområdet.

1. a) Låt $m = 0$. Undersök vad som händer med den räta linjen då värdet på *k* ändras (dra i punkten på glidaren för att ändra värdet på *k*). Testa även negativa värden på *k*. Beskriv med egna ord hur värdet på *k* påverkar grafen:

b) Ställ in nytt värde på glidaren *m* och undersök om ditt resultat ovan fortfarande verkar gälla. Om inte, ge en ny beskrivning:

c) Vad händer om $k = 0$?____

2. a) Låt $k = 1$. Undersök vad som händer med den räta linjen då värdet på *m* ändras. Beskriv med egna ord hur värdet på *m* påverkar grafen:

b) Värdet på *m* kan avläsas i koordinatsystemet. *Hur?*

c) Ställ in nytt värde på glidaren *k* och undersök om ditt resultat ovan fortfarande verkar gälla. Om inte, ge en ny beskrivning:

DEL 2

Öppna ett nytt fönster och lägg in punkterna *A* = (1,1) och *B* = (2,4).

Rita linjen som går genom punkterna med hjälp av verktyget:

3. Bestäm linjens ekvation genom att *studera grafen*.

Resultat:____

Högerklicka på linjens ekvation i algebrafönstret och välj: Ekvation y = k x + m

Jämför ditt resultat med formeln i algebrafönstret.

Flytta punkten *B* så att *B* = (3,5)

4. Bestäm linjens ekvation genom att *studera grafen*.

Resultat:____

Jämför ditt resultat med formeln i algebrafönstret.

Flytta punkten *B* så att *B* = (-2,4)

5. Bestäm linjens ekvation genom att *studera grafen*.

Resultat:____

Jämför ditt resultat med formeln i algebrafönstret.

6. Flytta punkterna *A* och *B* så att följande räta linjer konstrueras.
Ange 2 lösningar per uppgift.

a) $y = x + 1$ A = ________ B = _________

A = ________ B = _________

b) $y = 2x + 2$ A = ________ B = _________

A = ________ B = _________

c) $y = -2x - 1$ A = ________ B = _________

A = ________ B = _________

7. *Bestäm* lutningen, dvs. *k*-värdet, för linjerna som går genom punkterna *A* och *B* i följande fall, **utan** att använda GeoGebra.
Kontrollera därefter ditt resultat med hjälp av *GeoGebra*.

Punkter på linjen	**Linjens lutning (*k*)**
$A = (1,1)$ och $B = (2,5)$	
$A = (0,-2)$ och $B = (2,4)$	
$A = (0,-2)$ och $B = (4,4)$	
$A = (0,1)$ och $B = (4,6)$	
$A = (-1,-2)$ och $B = (3,6)$	
$A = (-2,5)$ och $B = (2, 1)$	

8. Beskriv hur man kan räkna ut en linjes lutning, dvs *k*-värdet, då man känner till två punkter på linjen.

9. **Dagens utmaning!**

Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna (-3, -3) och (3,1) **utan** att använda GeoGebra.

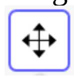
Resultat: ____

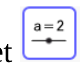
Kontrollera ditt resultat genom att mata in ditt svar ovan i inmatningsfältet och kontrollera att punkterna ovan ligger på linjen.

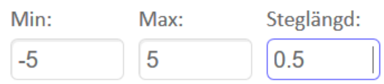
ANDRAGRADSFUNKTIONER

Andragradsfunktioner kan alltid skrivas på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ där *a*, *b* och *c* är reella tal och $a \neq 0$. I denna laboration ska vi studera andragradsfunktioner skrivna på denna form med hjälp av *GeoGebra*.

- Högerklicka i Ritområdet och markera *rutnät* (om det inte redan finns ett).
- Flytta hela koordinatsystemet så att origo hamnar i mitten på skärmen.

  Detta görs med hjälp av verktyget:  .

- Börja med att lägga in *a*, *b* och *c* som glidare genom att klicka på verktyget 

  och därefter någonstans i Ritområdet.
- Välj ”Steglängd” 0.5 för samtliga glidare. 

Tips: Genom att högerkicka på glidaren och hålla ned höger musknapp, kan glidaren flyttas omkring i Ritområdet.

- Mata in funktionen: $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ i inmatningsfältet.

- Lägg in formeln, som nu finns i algebrafönstret, i ritområdet genom att markera formeln och ”dra” den till ritområdet.

- Ställ in glidare *a* på värdet 1 och glidare *b* på värdet 0.

1. a) Undersök, genom att dra glidare *c*, hur värdet på *c* påverkar grafen. Beskriv med egna ord:

Ställ in nya värden på glidarna *a* och *b* och undersök om ditt resultat ovan fortfarande verkar gälla. Om inte, ge en ny beskrivning!

b) Värdet på konstanten *c* kan avläsas i koordinatsystemet. *Hur?*

c) Förklara *varför* värdet på *c* kan avläsas på detta sätt.

c) Ge en matematisk förklaring till *varför* värdet på *c* kan avläsas på detta sätt.

2. Undersök hur värdet på *b* påverkar grafen. Beskriv med egna ord vad som ändras och vad som inte ändras:

Ställ in glidaren *a* på 0.

3. a) Beskriv hur grafen ser ut.

b) Förklara *varför* grafen ser ut som den gör då $a = 0$.
b) Ge en matematisk förklaring till *varför* grafen ser ut som den gör då $a = 0$.

4. En andragradsfunktion har antingen en maximipunkt eller en minimipunkt. Undersök hur man kan se på funktionens formel om den har en maximipunkt eller en minimipunkt. Beskriv med egna ord.

I följande uppgifter ska vi undersöka kopplingen mellan en andragradsekvation och grafen till motsvarande andragradsfunktion.

5. a) Lös andragradsekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ algebraiskt (för hand).

Ställ in glidarna så att grafen till funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 3$ visas.

b) Lösningarna till motsvarande andragradsekvation, dvs. $x^2 - 4x + 3 = 0$, kan avläsas i koordinatsystemet. *Hur?*

c) Förklara *varför* lösningarna kan avläsas på detta sätt.

c) Ge en matematisk förklaring till *varför* lösningarna kan avläsas på detta sätt.

Ställ in glidarna så att grafen till funktionen $f(x) = x^2 - 2x - 3$ visas.

6. Använd grafen för att lösa ekvationen $x^2 - 2x - 3 = 0$

Svar:____

7. a) Lös andragradsekvationen $x^2 + 4x + 4 = 0$ algebraiskt (för hand).

b) Utan att använda GeoGebra, gissa hur grafen till funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ser ut i stora drag:

b) Använd *GeoGebra* för att undersöka om er gissning stämmer. Kommentera!

Ställ in glidarna så att grafen till funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 3$ visas.

8. Hur kan man se på grafen att motsvarande ekvation, dvs. $x^2 - 2x + 3 = 0$, saknar reella lösningar?