1. 2016

2.

2^2	2^9	2^4
2^7	2^5	2^3
2^6	2^1	2^8

3. $(x+y+z)(xz+yz+xy) = xyz$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(xz+yz+xy) - xyz = 0$$

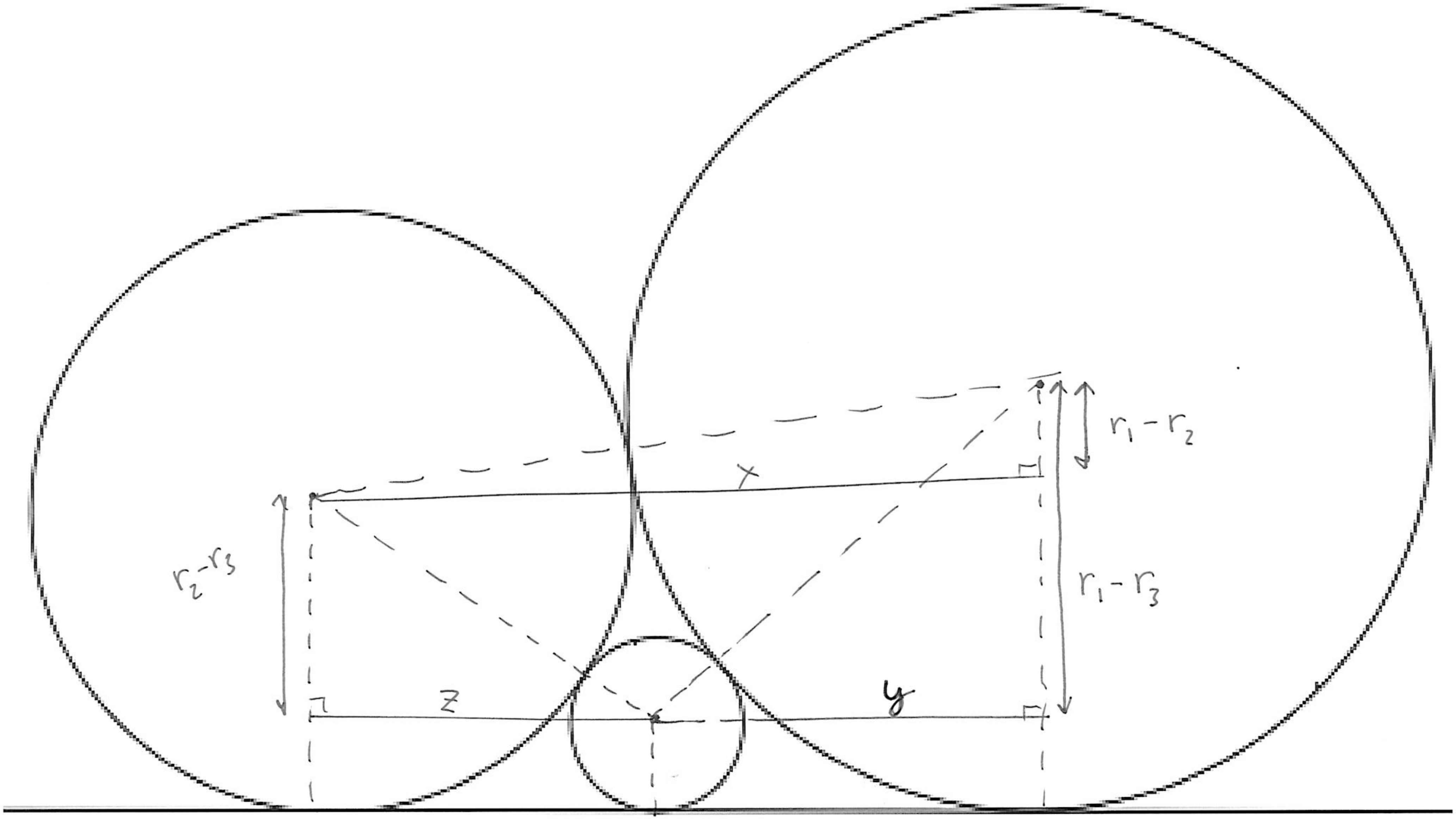
$$\Leftrightarrow (x+y)(xz+xy) + (x+y)yz + z(xz+yz) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(xz+xy+yz+z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x(z+y) + z(y+z)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(x+z) = 0$$

och resultatet följer



x
$r_1 - r_2$
$r_2 - r_3$
$r_1 - r_3$
z
y

Med figurens beteckningar

$$(r_1+r_2)^2 = x^2 + (r_1-r_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad x = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

$$(r_1+r_2)^2 = (r_1-r_3)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad y = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

$$(r_2+r_3)^2 = (r_2-r_3)^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \quad z = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

$$x = y + z \iff$$

$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_2 r_3}$$

Dela med $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ s.e.

$$\frac{2}{\sqrt{r_3}} = \frac{2}{\sqrt{r_2}} + \frac{2}{\sqrt{r_1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

5. Antag att $m^2 < 7n^2$. Vill visa att $\left(m + \frac{1}{m}\right)^2 < 7n^2$.

Sätt $m^2 = 7k + \delta$ där

$\delta \in \{0, 1, 2, 4\}$ (rester modulo 7)

Notera att $7k + \delta < 7n^2$

$\Rightarrow n^2 > k + \frac{\delta}{7} \Rightarrow \boxed{n^2 \geq k + 1}$

(ty n heltal).

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^2 = m^2 + 2 + \frac{1}{m^2} = 7k + \delta + 2 + \frac{1}{m^2}$$

$$:= 7k + \eta.$$

Vi har $\eta < 7 \Rightarrow$

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^2 = 7k + \eta < 7k + 7$$

$$\leq 7(k+1) \leq 7n^2$$

$\therefore \left(m + \frac{1}{m}\right)^2 < 7n^2$, V.S.B.

6. Det existerar oändligt många pytagoreiska tripler $\Longrightarrow$

det existerar oändligt många rationella ~~tal på~~ punkter på enhetscirkeln.

Tag $P_j = (x_j, y_j)$ $(1 \leq j \leq N)$

rationella punkter på enhetscirkeln.

Antag $x_j = \dfrac{a_j}{b_j}$, $y_j = \dfrac{c_j}{d_j}$

Sätt $R = \prod_{j=1}^{N} b_j d_j$

$Q_j = (Rx_j, Ry_j) \in \mathbb{Z}^2$ och

$Q_j \in \{(x,y) : x^2 + y^2 = R^2\}$.

7. För $k \in \mathbb{N}$ har vi $2^k > k^2/2$

Ger att för $x, y \geq 2$

$$x^p + y^q \geq 2^p + 2^q > \frac{1}{2}(p^2+q^2) \geq pq$$

$\Rightarrow$ $y = 1$ (eller $x = 1$)

Ekvation $1 + x^p = pq$ fås.

Fermat ger $x^p \equiv x \pmod p$

$\Rightarrow$ $x \equiv -1 \pmod p$

$$1 + x^p = 1 + (pm-1)^p$$

$$= 1 + \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (pm)^j (-1)^{p-j}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} p^j m^j (-1)^{p-j}$$

$= p^2 \cdot N$ eftersom $p \mid \binom{p}{1}$

$p^2 \mid 1 + x^p = pq \Rightarrow \boxed{p = q}$

Ger $1+x^p = p^2$

Om $x \geq 3$ får vi

$1+x^p \geq 1+3^p > p^2$

$x=2$: $1+2^p = p^2$

Fermat ger $2^p = pk+2$

$\Rightarrow 1+2^p = pk+3 = p^2$

$\Rightarrow p \mid 3 \Rightarrow p=3$

$p=q=3$ ger $(x,y)=(2,1)$

$x=1$: ingen lösning.

Svar $(p,q)=(3,3)$

8. Vi har

$$\sin x_n = x_n - \frac{x_n^3}{6} + O(x_n^5)$$

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{\sin^2 x_n} = \frac{1}{x_n^2\left(1 - \frac{x_n^2}{6} + O(x_n^4)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{x_n^2}\left(1 - \frac{x_n^2}{6} + O(x_n^4)\right)^{-2}$$

$$(1-z)^{-2} = 1 + 2z + O(z^2) \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{x_n^2}{6}\right)^{-2} = 1 + \frac{x_n^2}{3} + O(x_n^4)$$

Varför vi får

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n^2}\left(1 + \frac{x_n^2}{3} + O(x_n^4)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{3} + O(x_n^2)$$

Får nu

$$\frac{1}{x_N^2} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) + \frac{1}{x_0^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{3} + O(x_n^2) \right) + \frac{1}{x_0^2}$$

$$= \frac{N}{3} + O\left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 \right)$$

$\{x_n\}$ avtagande $\Rightarrow$ $L = \lim x_n$

existerar och uppfyller $L = \sin L$.

Enda lösning ~~...~~ är $L = 0$.

$\Rightarrow x_n^2 \to 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 = o(N)$$

$\therefore$

$$\frac{1}{x_N^2} = \frac{N}{3} + o(N) \Rightarrow \frac{1}{N x_N^2} \to \frac{1}{3}.$$

$\boxed{14}$