Problemlösning
Sonja Kovalevskydagarna Karlstad 2016

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon och linjal.

Instruktioner: skriv gruppens nummer på försättsbladet **och** på varje blad ni lämnar in. Lägg era lösningar i ordning.
Varje problem ger maximalt 5 poäng, för full poäng krävs tydliga och fullständigt motiverade lösningar.

1. Låt n vara ett udda tal. Visa att $n^3 - n$ är delbart med 24.

2. Det kortaste avståndet från en punkt P till en cirkel är 16. Bestäm cirkelns radie, om längden av tangenten till cirkeln från P är 20.

3. I en triangel med arean A är längderna av två höjder inte mindre än $\sqrt{2A}$. Bestäm triangelns vinklar.

4. Låt a, b vara heltal med $b > 0$. Betrakta den aritmetiska talföljden
$$\{a, a+b, a+2b, a+3b, ...\}.$$
Visa att om talföljden innehåller ett kvadrattal så innehåller den oändligt många.

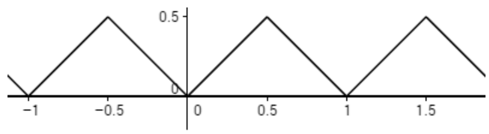
5. Visa att om $q \geq 9$ är ett godtyckligt heltal så existerar det ett heltal p så att
$$\sqrt{71} < \frac{p}{q} < \sqrt{73}.$$

Var god vänd!

6. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

och utvidga f till en funktion med period 1 (se bild nedan).



Definiera

$$F(x) = f(x) + f(\alpha x),$$

visa att F är periodisk om och endast om α är ett rationellt tal.

7. Finn alla icke-negativa heltalslösningar (m, n) till

$$3^m - 1 = 2^n.$$

8. Visa att det för varje $\epsilon > 0$ existerar heltal m, n så att

$$0 < m + n\sqrt{2} < \epsilon.$$

9. Om en funktion vet vi att $f(1) = 2$ och $f(x+y) = f(x)f(y)$ för alla tal x, y. Beräkna $f(p/q)$ för godtyckligt rationellt tal p/q.

10. Låt $a_1, a_2, ..., a_{11}$ vara elva positiva heltal. Visa att det finns $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{11} \in \{-1, 0, 1\}$ (där inte alla $\varepsilon_j = 0$) så att

$$S = \sum_{j=1}^{11} \varepsilon_j a_j$$

är delbart med 2016.