1. Vi har $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$.

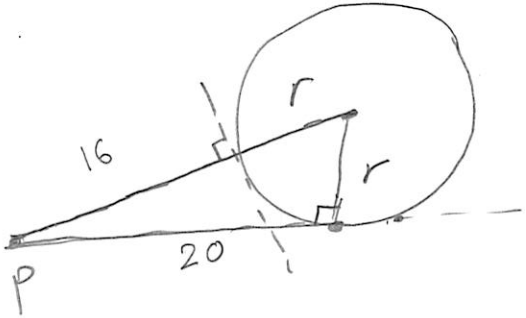
$n$ udda $\Rightarrow$ $n-1$ och $n+1$ jämna.

Vidare, en av $n-1$ o $n+1$ måste vara delbart med 4.

Slutligen måste 3 dela ett av talen $n-1, n, n+1$. Följer att

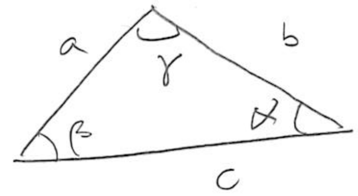
$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ delar $n^3 - n$, V.S.B.

2.




$(16+r)^2 = 20^2 + r^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow r = \frac{9}{2}$

3




$h_a$ = höjd mot sida $a$

$h_b$ = höjd mot sida $b$

Antag att $h_a, h_b \geq \sqrt{2A}$

$2A = a h_a = b h_b \Rightarrow a \leq \sqrt{2A},\ b \leq \sqrt{2b}$

Men $2A = ab \sin\gamma \leq (\sqrt{2A})^2 \sin\gamma$

$\Leftrightarrow 1 \leq \sin\gamma \Leftrightarrow \underline{\gamma = 90^\circ}$

Men då gäller $h_a = b$ och $h_b = a$

varför $a = b = \sqrt{2A}$

Så triangeln är likbent $\Rightarrow$

$\underline{\alpha = \beta = 45^\circ}$

4. Antag $a+mb=c^2$ för något $m \in \mathbb{N}$. Sätt $n_j = m + 2cj + j^2 b \in \mathbb{N}$ för $j \in \mathbb{N}$. Vi har

$$a + n_j b = a + mb + 2cbj + j^2 b^2$$
$$= c^2 + 2cbj + j^2 b^2$$
$$= (c + jb)^2$$

Alltså, $a + n_j b$ är kvadrattal för alla $j \in \mathbb{N}$, v.s.b.

5. Sätt

$$n = \max\{r \in \mathbb{N} : \frac{r}{q} \leq \sqrt{71}\}$$

och låt $p = n+1$. Då har vi

$$\frac{p}{q} > \sqrt{71}$$

enligt definitionen av $n$.

Vidare,

$$\frac{p}{q} = \frac{n+1}{q} = \frac{n}{q} + \frac{1}{q} \leq \sqrt{71} + \frac{1}{q} \leq \sqrt{71} + \frac{1}{9}$$

eftersom $q \geq 9$.

Notera att $\sqrt{73} - \sqrt{71} = \frac{2}{\sqrt{73} + \sqrt{71}} > \frac{2}{9+9} = \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{q} \leq \sqrt{71} + \frac{1}{9} < \sqrt{71} + \sqrt{73} - \sqrt{71}$$
$$= \sqrt{73}$$

Alltså, $\sqrt{71} < \frac{p}{q} < \sqrt{73}$, v.s.b.

6. Antag först att $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = p/q$.

För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$F(x+q) = f(x+q) + f\left(\frac{p}{q}(x+q)\right)$$
$$= f(x+q) + f\left(\frac{p}{q}x + p\right)$$
$$= f(x) + f\left(\frac{p}{q}x\right)$$
$$= F(x).$$

Antag nu att $F$ är periodisk med period $r \in \mathbb{R}$.

Notera att $F(0) = f(0) + f(\alpha \cdot 0) = 0$

Ger $F(r) = 0 \Leftrightarrow f(r) + f(\alpha r) = 0$.

Eftersom $f \geq 0$ måste

$$f(r) = f(\alpha r) = 0$$

varför $r \in \mathbb{Z}$ och $\alpha r \in \mathbb{Z}$.

Följer enkelt att $\alpha \in \mathbb{Q}$, V.S.B.

7.

$\underline{m=1}$: $3^1 - 1 = 2 \Rightarrow (m,n) = (1,1)$

$\underline{m=2}$: $3^2 - 1 = 8 = 2^3 \Rightarrow (m,n) = (2,3)$

Antag $m \geq 3$.

$$3^m - 1 = (2+1)^m - 1 = 2^m + m \cdot 2^{m-1} + \dots + m$$
$$= 2N + m$$

För att $2N + m = 2^n$ måste $m = 2k$, $k \geq 2$.

Ger oss

$$3^m - 1 = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$$

Men både $3^k - 1$ o $3^k + 1$ kan ej vara potenser av 2 för $k \geq 2$

Varför $3^m - 1 = 2^n$ saknar lösning för $m \geq 3$.

8. Notera att $0 < (\sqrt{2}-1)^k = A + B\sqrt{2}$

för alla $k \in \mathbb{N}$. Eftersom

$\sqrt{2}-1 < 1$ så kan vi välja

$k \in \mathbb{N}$ så att $(\sqrt{2}-1)^k < \varepsilon$.

Följer att

$$0 < (\sqrt{2}-1)^k = A + B\sqrt{2} < \varepsilon,$$

V.S.B.

9. $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$

(antag $f \neq 0$). Vidare,

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x)$$

$$\Rightarrow \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Räcker betrakta $x > 0$.

Observera nu att

$$f(p/q) = f\left(\frac{1}{q} + \frac{p-1}{q}\right) = f(1/q) \cdot f\left(\frac{p-1}{q}\right)$$

$$= f(1/q)^2 f\left(\frac{p-2}{q}\right)$$

$$= \ldots = f(1/q)^p f(0) = f(1/q)^p$$

$$f(1) = f(q/q) = f(1/q) f\left(\frac{q-1}{q}\right)$$

$$= \ldots = f(1/q)^q$$

$$\Rightarrow \quad f(1/q) = f(1)^{1/q}.$$

Följer nu att

$$f(p/q) = f(1/q)^p = f(1)^{p/q}$$

$$= 2^{p/q}.$$

10. Betrakta alla heltal på formen

$$n = \sum_{j=1}^{11} \mu_j a_j \quad \text{där} \quad \mu_j \in \{0, 1\}$$

Fall 1 Det existerar $n$ med två olika på formen ovan framställningar:

$$n = \sum_{j=1}^{11} \mu_j a_j = \sum_{j=1}^{11} \nu_j a_j$$

där $\mu_j, \nu_j \in \{0, 1\}$ och inte alla $\mu_j = \nu_j$. Då har vi

$$0 = n - n = \sum_{j=0}^{11} (\mu_j - \nu_j) a_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j a_j$$

där $\eta_j \in \{-1, 0, 1\}$ och inte alla $\eta_j = 0$. Tag $\varepsilon_j = \eta_j$, då har vi $0 = \sum_{j=1}^{11} \varepsilon_j a_j$ är delbart med 2016.

Fall 2 Antag att varje val av $\mu_j \in \{0, 1\}$ $(1 \le j \le 11)$ ger olika tal $n = \sum_{1}^{11} \mu_j a_j$. Antalet tal är då $2^{11} > 2016$. Enligt lådprincipen finns det två tal

$$n_1 = \sum_{j=1}^{11} \mu_j a_j \quad \text{och} \quad n_2 = \sum_{j=1}^{11} \nu_j a_j$$

med samma rest modulo 2016. Då har vi att $n = n_1 - n_2 =$

$$= \sum_{j=1}^{11} (\mu_j - \nu_j) a_j$$ är delbart med 2016

och $\mu_j - \nu_j \in \{-1, 0, 1\}$.